D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Schnellübung 6

---

1. Es sei $h \in [0,1]$ eine reelle Zahl und T das Tetraeder mit Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnitts von T mit der Ebene $z = h$.

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze von T durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

Lösung:

(a) Zwischen $h = 0$ und $h = 1$ nehmen die Seitenlängen des Schnittes parallel zur x- und y-Achse linear ab. Auf Höhe $z = h$ haben diese rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten also Länge $1 - h$, nach der Flächenformel für Dreiecke gilt also

$$S(h) = \frac{(1-h)^2}{2}.$$

(b) Der Volumeninhalt des Tetraederstumpfes ergibt sich durch Integration in z-Richtung und ist gleich

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3\right]_0^h \\ &= -\frac{1}{6}\left((1-h)^3 - 1\right) = \frac{1}{6}(1-(1-h)^3) = \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{6}. \end{aligned}$$

Im Fall $h = 1$ bekommen wir den Volumeninhalt des Tetraeders:

$$V(1) = \frac{1}{6}.$$

2. Ein Kreisel werde erzeugt durch Rotieren der Funktion

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}}, \quad 0 \le x \le 1$$

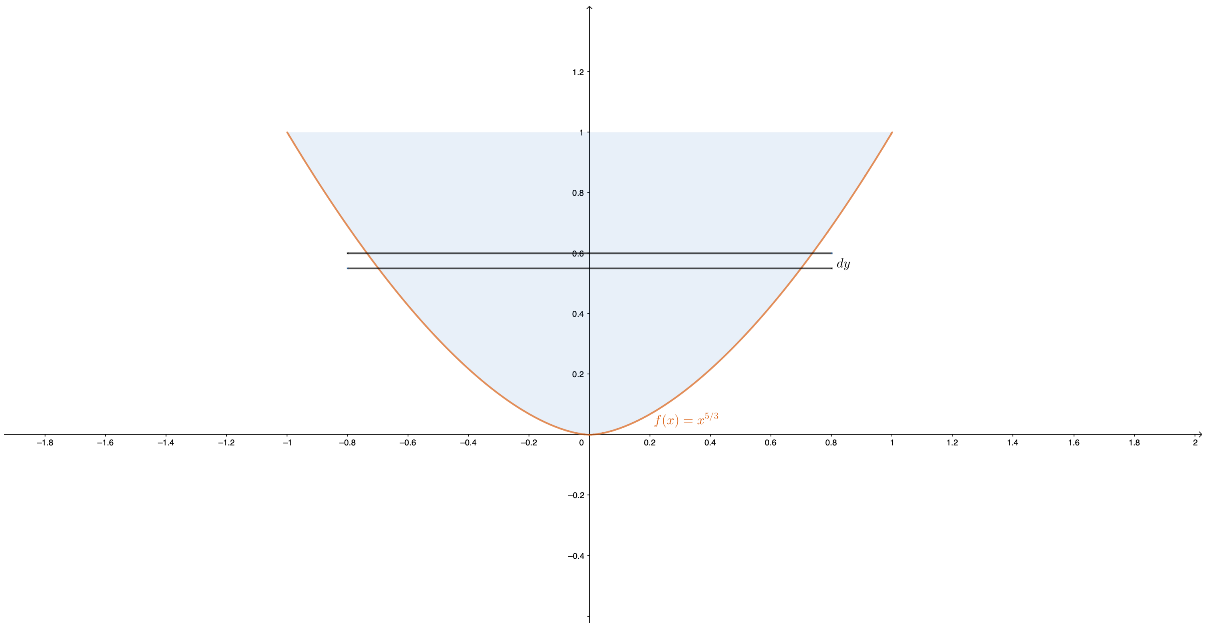
um die y-Achse. Die Massenverteilung innerhalb des Kreisels sei beschrieben durch die Dichte

$$\rho(y) = 2 - y, \quad 0 \le y \le 1.$$

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse des Kreisels.

(b) Auf welcher Höhe liegt der Schwerpunkt?

Lösung:



(a) Die Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ is bijektiv mit Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{3}{5}}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Schneidet man aus dem Kreisel eine infinitemal dünne Schreibe von der Dicke dy heraus, so hat diese die Masse

$$dm = \rho(y)\pi(f^{-1}(y))^2 dy.$$

Die Gesamtmasse M ergibt sich durch Integration über die Höhe des Kreisels:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 dm = \pi \int_0^1 (f^{-1}(y))^2 \rho(y) dy \\ &= \pi \int_0^1 y^{\frac{6}{5}}(2-y) dy \\ &= \pi \left[2\frac{5}{11} y^{\frac{11}{5}} - \frac{5}{16} y^{\frac{16}{5}} \right]_0^1 \\ &= \frac{105}{176}\pi. \end{aligned}$$

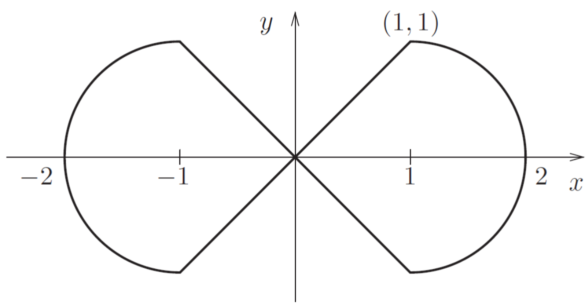
(b) Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen. Seine Berechnung reduziert sich also auf die Bestimmung der y-Komponente y_S. Für die Höhe y_S des Schwerpunktes ist folgende Gleichung erfüllt:

$$y_S \cdot M = \int_0^1 y dm.$$

Damit können wir y_S folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{\pi}{M}\int_0^1 y(f^{-1}(y))^2\rho(y)dy \\
&= \frac{\pi}{M}\int_0^1 y\cdot y^{\frac{6}{5}}(2-y)dy \\
&= \frac{\pi}{M}\left[2\frac{5}{16}y^{\frac{16}{3}} - \frac{5}{21}y^{\frac{19}{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{M}(\frac{10}{16} - \frac{5}{21}).
\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der gezeichneten Fläche bezüglich der y-Achse.



Lösung: Da das Gebiet symmetrisch ist, ist das Trägheitsmoment J_y der ganzen Fläche gleich viermal dem Trägheitsmoment eines Viertels.

Für $x \in [0,2]$ sei $G(x)$ die Ausdehnung in y-Richtung an der Stelle x. Um $G(x)$ zu finden, beachten wir, dass die Fläche durch die Gerade $y = x$ und den Kreis $(x-1)^2 + y^2 = 1$ berandet ist. Also gilt

$$\begin{aligned}
G(x) &= x \quad \text{für } 0 \le x \le 1 \\
G(x) &= \sqrt{1-(x-1)^2} \quad \text{für } 1 \le x \le 2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
I_y &= 4\left(\int_0^1 x^2 x dx + \int_1^2 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx\right) \\
&= 4\left(\int_0^1 x^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 1)^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt\right) \\
&= 4\left(\frac{x^4}{4}|_0{}^1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2\sin t + 1)(1-\sin^2 t)dt\right) \\
&= 1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^4 t + 2\sin t - 2\sin^3 t + 1 dt \\
&= 1 + 4(-\frac{3\pi}{16} + 2 - 2\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}) \\
&= 1 + \frac{5\pi}{4} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{11}{3} + \frac{5\pi}{4},
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $x - 1 = \sin t$, $dx = \cos t dt$ benutzt haben.