Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Schnellübung 2

---

1. Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x \leq -1; \\ (\alpha + \beta)x, & -1 < x < 1; \\ x^2 + \alpha x - \beta, & x \geq 1 \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichnen Sie den resultierenden Graphen von f.

2. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = 0$$

eine Lösung $x \in (-1, 1)$ besitzt.

3. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^3 - x$. Bestimmen Sie ein Intervall $I := [a, b)$, so dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen von p und skizzieren Sie den Graphen von p.

4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sin(3x) + 4\sin(x)^3 - 3\sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass $f''(x) + 9f(x) = 0$.
(*Bemerkung*: Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, welche später in der Vorlesung noch behandelt werden wird.)

b) Benutzen Sie die Additionsformeln für sin und cos um zu zeigen, dass $f(x) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichheit $-\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.