Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Schnellübung 3

---

1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls f eine gerade Funktion ist, dann ist f' eine ungerade Funktion.

2. Zeigen Sie $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(x) \leq x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mittels Methoden der Extremalwertrechnung.

3. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x).$$

(a) Zeigen Sie $f''(x) - 4f(x) = 0$.

(b) Zeigen Sie $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(c) Zeigen Sie $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Es sei

$$f(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 1,$$
$$g(x) = \ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n).$$

Zeigen Sie, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Gilt auch $f(x) = o(g(x))$ oder $g(x) = o(f(x))$?