D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas

Prof. Dr. Urs Lang

Schnellübung 4

---

1. (a) Der Schwerpunkt eines Objekts befindet sich am Punkt $5+2i$. An welchem Ort befindet sich der Schwerpunkt des Objekts, nachdem dieses in der komplexen Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt rotiert wurde?

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z^2 - 3z + 2$ für $z = 2 + i$.

(c) Wie müssen $p, q \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass

$$\frac{z+1}{pz+q} = 3 + 2i,$$

wobei $z = 7 + 5i$?

2. (a) Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

(b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{C}$ die folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$A = \left\{re^{\imath\varphi} \mid r \in [0,1]\,, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]\right\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 1\}\,.$$

Zeichnen Sie die Bilder von A und B unter f, das heisst, die Teilmengen $f(A)$ und $f(B) \subset \mathbb{C}$.

4. (a) Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

(b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.