D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 1

MC-Aufgaben

1. Welche der Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z. B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

√ (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

√ (d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Dies ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

2. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Die Folge ist monoton wachsend.

√ (b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist eine Nullfolge.

√ (d) Die Folge ist konvergent.

√ (e) Der Limes der Folge ist 1.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist beschränkt und konvergiert gegen 1. Also sind alle Aussagen *ausser* die dritte korrekt.

3. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21}$$

ist gleich ...

√ (a) $\frac{1}{5}$.

(b) 0.

(c) ∞.

(d) $\frac{1}{32}$.

(e) $-\frac{1}{21}$.

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21} \underbrace{=}_{\substack{\text{Zähler und Nenner}\\ \text{dividiert durch } n^3}} \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^3}}{10+\frac{1}{n^2}+\frac{21}{n^3}}.$$

Da die Summanden $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}, \frac{21}{n^3}$ jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

4. Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

ist gleich ...

(a) $\frac{1}{2}$.

√ (b) $\frac{2}{3}$.

(c) 2.

(d) $\frac{3}{2}$.

(e) ∞.

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da $|q| =| -\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

5. Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

(a) $a_n = \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Die Folge konvergiert gegen die Eulersche Zahl e.

√ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Wird durch die harmonische Reihe minorisiert (das bedeutet die harmonische Reihe ist kleiner gleich) und ist deshalb divergent, weil die harmonische Reihe divergent ist. Die harmonische Reihe ist divergent wegen:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots + \frac{1}{n},$$

und deshalb $a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + 1/n$, was jeden Wert übersteigt wenn n genügend gross ist.

√ (c) $a_n = \frac{1}{1} + \dots \frac{1}{n}$.

Harmonische Reihe und deshalb divergent.

√ (d) $a_n = 1 + \dots + n$.

$a_n \geq n$ und deshalb divergent.

Offene Aufgaben

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

(a) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

(b) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$

(c) $\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

(d) Für $a \neq 8$: $\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4)$

(e) Für $a, b \neq 0$: $\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab)$

(f) Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$?

(g) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$?

Lösung:

(a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \dfrac{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = -6$

(b) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a+b.$

(c) $\dfrac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{ab(a-b)}{\frac{ab}{a}-\frac{ab}{b}} = \dfrac{ab(a-b)}{b-a} = -ab$

(d)
$$\begin{aligned}
&\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4) \\
&= \frac{(-3a-a^2)(8+a)}{(8-a)(8+a)} + \frac{(2-2a)(8-a)}{(8+a)(8-a)} + \frac{a^3+a^2+42a+8\cdot 62}{(8-a)(8+a)} \\
&= \frac{-a^3-9a^2-42a+16}{64-a^2} + \frac{a^3+a^2+42a+8\cdot 62}{64-a^2} = \frac{-8a^2+8\cdot 64}{64-a^2} = 8.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab) &= -\ln(ab) + \ln(a^2) - \ln(b) = -\ln(a) - \ln(b) + 2\ln(a) - \ln(b) \\
&= \ln(a) - 2\ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right).
\end{aligned}$$

(f) Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$?
Durch Exponenzieren auf beiden Seiten erhalten wir $5 = a^{\frac{1}{2}}$. Durch Quadrieren erhalten wir $a = 25$.

(g) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$?
Es gilt

$$\begin{aligned}
& 7^{2a} = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2a = \log_7(2) \\
\Leftrightarrow\quad & a = \frac{1}{2}\log_7(2) = \log_7(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

7. Gegeben sei die Funktion

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f. Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbreich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

Lösung: f ist eine rationale Funktion und lässt sich wie folgt faktorisieren

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Wie jede rationale Funktion, ist f überall in $\mathbb{R}$ ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$.

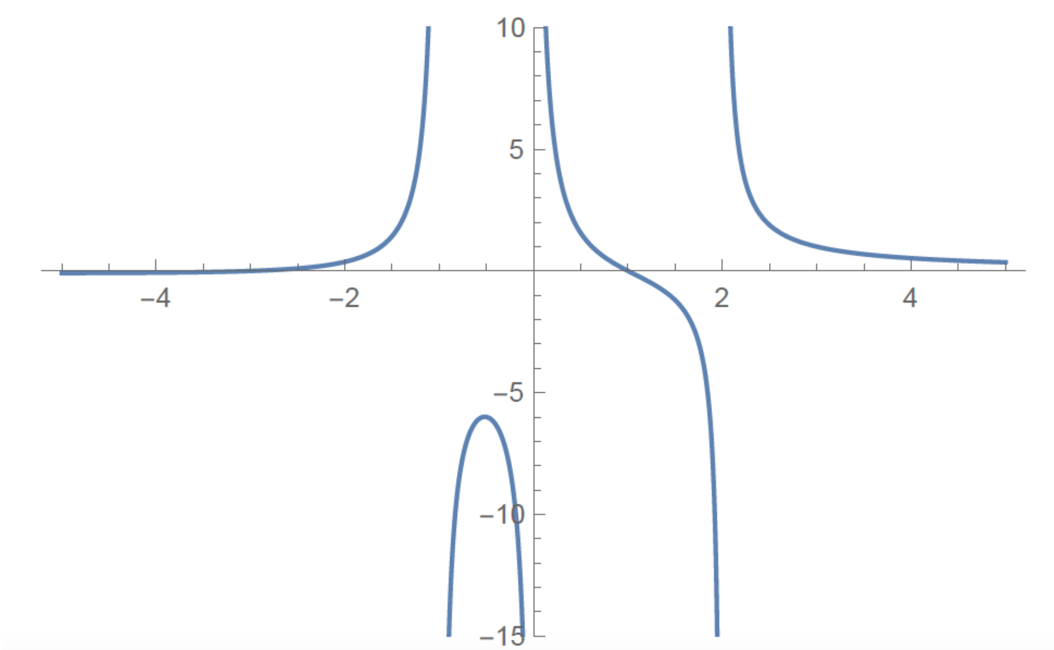
Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich -3 und 1.

Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$\begin{aligned} P &= (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty) \\ N &= (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \end{aligned}$$

wobei P die Menge, in der f positiv ist, und N die Menge, in der f negativ ist, bezeichnet.

Der Graph $\Gamma(f)$ ist:



8. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja: was ist ihr Grenzwert?

(a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$.
Lösung: Offensichtilich ist (a_n) nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt.
Die ersten zwei Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

und

$$a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Da cos bekanntlich 2π-periodisch ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+6} = a_n.$$

Deshalb kann die Folge nur konvergieren oder monoton sein, wenn sie konstant ist. Das ist sie aber nicht. Also ist sie nicht monoton und konvergiert auch nicht.

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$.
Lösung: Es gilt $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.
Die Folge $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt (durch 1 von oben und 0 von unten), monoton fallend und konvergiert gegen 0. Daher ist $(a_n)_{n\geq 1}$ ebenfalls beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(c) $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$.
Lösung: Es gilt

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 - \frac{4}{n}}.$$

Da die Summanden $\frac{5}{n^2}, \frac{2}{n^4}, \frac{4}{n}$ jeweils eine Nullfolge bilden, konvergiert die Folge (a_n) gegen $\frac{3}{7}$. Insbesondere ist die Folge beschränkt. Sie ist nicht monoton, da $a_1 = 0 < \frac{3}{7} < \frac{200}{459} = a_3$.

(d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$.
Lösung: Wir rechnen für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_n - a_{n-1}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Beachte, dass für $n = 0$: $a_2 - a_1 = 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0$, also es gilt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} (a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

konvergiert gegen $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$ (geom. Reihe), also beschränkt, klar nicht monoton.

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Lösung: Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton fallend, konvergiert gegen 0 und ist daher auch beschränkt.

(f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$.
Lösung: Wegen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{(n+1)n} - n = (\sqrt{(n+1)n} - n) \frac{\sqrt{(n+1)n} + n}{\sqrt{(n+1)n} + n} \\ &= \frac{(n+1)n - n^2}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

ist die Folge monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, daher ist sie auch beschränkt.

9. Fibonacci-Folge: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen.

(a) Begründen Sie, wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.

Lösung: Weil $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ und $a_{n-2} \geq 1$ für alle $n \geq 2$, folgt dass $a_n > a_{n-1}$ und deshalb ist die Folge (a_n) monoton wachsend. Es gilt

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \tag{1}$$

für alle $n \geq 2$. Somit $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 2$, weil jedes Folgenglied von (b_n) nichtnegativ ist. Weil $b_1 = 1$ folgt deshalb $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Eine Konsequenz davon ist, dass $\frac{1}{b_{n-1}} \leq 1$ und deshalb folgt wegen (1), dass $b_n \leq 2$. Wir haben also gezeigt, dass $1 \leq b_n \leq 2$ und die Folge (b_n) ist somit beschränkt.

(b) Es sei

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } \ n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = (a_{n-1} + a_{n-2}) a_{n-3} - a_{n-1}(a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &= a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} \\ &= a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} = -c_{n-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(c) Begründen Sie, dass $c_n = (-1)^{n+1}$ gilt.

Lösung: Weil $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, erhalten wir $c_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ und deshalb folgt $c_4 = -1$, $c_5 = 1$, $c_6 = -1$ und so weiter.

(d) Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}), wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}), wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.

Lösung: Weil $c_n = (-1)^{n+1}$, folgt $c_{2n} = (-1)^{2n+1} = -1$ für alle $n \geq 1$. Also

$$a_{2n} a_{2n-3} - a_{2n-1} a_{2n-2} = -1,$$

folglich $a_{2n} a_{2n-3} - a_{2n-1} a_{2n-2} \leq 0$ und somit $a_{2n} a_{2n-3} \leq a_{2n-1} a_{2n-2}$, was äquivalent zu

$$b_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \leq \frac{a_{2(n-1)}}{a_{2(n-1)-1}} = b_{2(n-1)}$$

ist. Deshalb ist die Folge (b_{2n}) monoton fallend. Komplett analog lässt sich zeigen, dass die Folge (b_{2n-1}) monoton steigend ist.

(e) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Die Folge (b_{2n}) ist wegen Teilaufgabe a) beschränkt und wegen Teilaufgabe d) monoton fallend. Folglich ist die Folge (b_{2n}) konvergent. Es gilt

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2(n-1)}}},$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2(n-1)}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n}}}.$$

Wir setzen $x\colon = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n}$. Wir haben also gezeigt:

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Auflösen nach x gibt

$$(x-1)(1+\frac{1}{x}) = 1$$

und somit $x + 1 - 1 - \frac{1}{x} = 1$, was äquivalent zu

$$x - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

ist. Durch multiplizieren der obigen Geichung mit x erhält man

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erḧalt man $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Weil alle Folgeglieder von (b_{2n}) positiv sind, folgt dass $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir haben also gezeigt, dass die Folge (b_{2n}) gegen den goldenen Schnitt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. Mit genau der gleichen Rechnung lässt sich zeigen, dass auch die Folge (b_{2n-1}) gegen den goldenen Schnitt ϕ konvergiert.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil die Folge (b_{2n}) konvergiert gibt es ein $N_1 \geq 1$, so dass für alle $n \geq N_1$ folgt $|b_{2n} - \phi| < \epsilon$. Weiterhin, weil die Folge (b_{2n+1}) konvergiert, gibt es ein $N_2 \geq 1$, so dass für alle $n \geq N_2$ folgt $|b_{2n-1} - \phi| < \epsilon$. Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert, wie behauptet.