D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

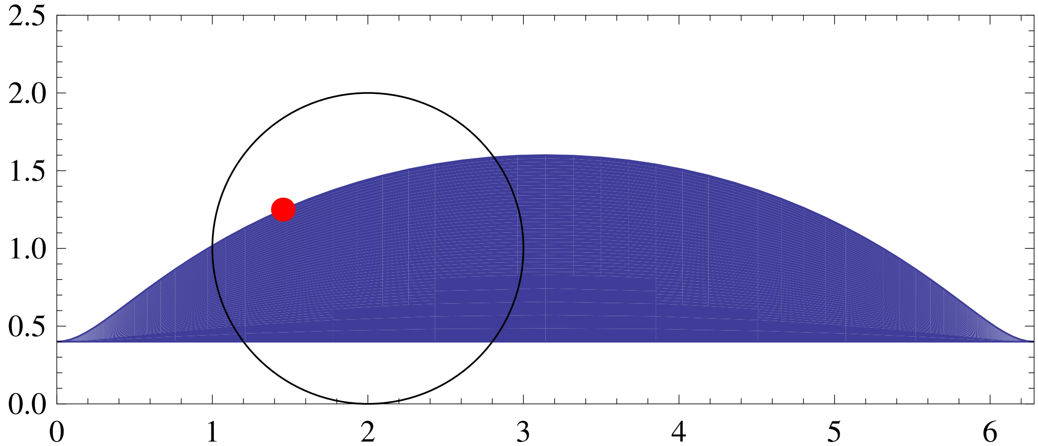
Lösung Serie 10

MC-Aufgaben

1. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

√ (d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Die Zahl a ist der Radius des rollenden Rads; b ist der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt des Rads. Die Flächenformel

$$\int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt$$

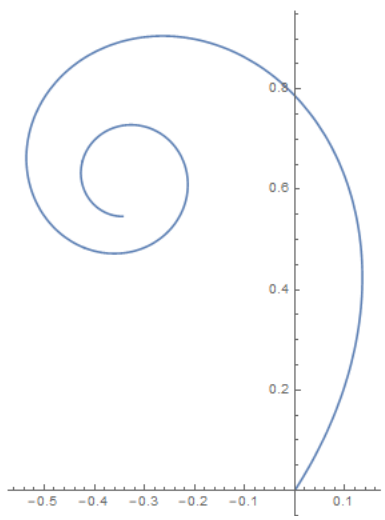
gibt den Flächeninhalt unter der Kurve mit Parametrisierung $(x(t), y(t))$. Gesucht ist aber den Flächeninhalt der blauen Figur, also müssen wir den Flächeninhalt des Rechtecks subtrahieren. Dieses Rechteck hat Höhe $a - b$ und Breite $2\pi a$ (=Umfang des Rads). Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)(a - b\cos t)\, dt - 2\pi a(a-b) \\
&= \int_0^{2\pi} (a^2 - 2ab\cos t + b^2\cos^2 t)\, dt - 2\pi a(a-b) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(a^2 - 2ab\cos t + b^2 \cdot \frac{1+\cos(2t)}{2} \right) dt - 2\pi a(a-b) \\
&= \left[a^2 t - 2ab\sin t + \frac{b^2}{2}(t + \frac{\sin(2t)}{2}) \right]_0^{2\pi} - 2\pi a(a-b) = 2a^2\pi + b^2\pi - 2\pi a(a-b) = (b^2 + 2ab)\pi.
\end{aligned}
$$

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$
t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u,\; \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right),
$$

wobei $t \in [1, 4\pi)$.



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

√ (c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\ln(\pi)$

Zur Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ mit $t_A \leq t \leq t_B$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$
s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt,
$$

wir müssen zunächst also t_A und t_B bestimmen. Da wir im Punkt $(0,\, 0)$ starten sollen, gilt offensichtlich $t_A = 1$.

Der Tangentialvektor $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ an die Kurve K ist vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung muss also

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{\cos(t)}{t} = 0$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\sin(t)}{t} \neq 0$$

gelten. Der erste Punkt mit vertikaler Tangente ist somit bei $t = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Bogenlänge ist also

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\rho(\varphi) = 2a(1 + \cos\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$?

(a) $8a$

(b) $8\sqrt{2}a$

$\checkmark$ (c) $16a$

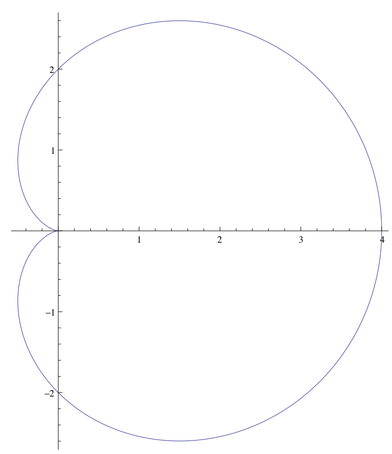
(d) $16\sqrt{2}a$

(e) $32a$

Die Bogenlänge ist

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\varphi}{2}\right|\, d\varphi \\ &= 8a \int_0^{\pi} |\cos u|\; du = 8a\left(\int_0^{\pi/2} \cos u\, du - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos u\, du\right) = 8a(1+1) \\ &= 16a. \end{aligned}$$

Skizze der Kardioide (mit $a = 1$):



4. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve

(b) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(c) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(d) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

√ (e) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

(f) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

Die Bogenlänge der neuen Kurve berechnet sich durch

$$\int_0^1 \sqrt{(ax(t))^2 + (ay(t))^2} dt = a \int_0^1 \sqrt{ax(t)^2 + y(t)^2} dt;$$

also das a-te Vielfache. Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (ax(t)a\dot{y}(t) - a\dot{x}(t)ay(t))dt = \frac{a^2}{2} \int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)ay(t))dt;$$

also das a^2-te Vielfache. Was beides zu erwarten war: Längen strecken sich eindimensional, Flächen zweidimensional.

5. Berechnen Sie die Bogenlänge L der Spirale, die gegeben ist durch

$$\vec{r} : [0,T] \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto e^{-t}(\cos t, \sin t),$$

wobei $T \to +\infty$.

(a) $L = \infty$

(b) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $L = \frac{1}{2}$

√ (d) $L = \sqrt{2}$

(e) $L = 2$

Es gilt zunächst

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = -e^{-t}(\cos t, \sin t) + e^{-t}(-\sin t, \cos t) = e^{-t}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t).$$

Für fixes T ist die Bögenlänge damit gegeben durch

$$\begin{aligned} L = \int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt &= \int_0^T e^{-t}\sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^T e^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^T e^{-t}\sqrt{2} dt = \sqrt{2}(1 - e^{-T}). \end{aligned}$$

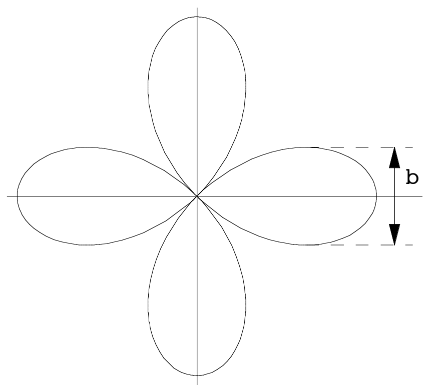
Die gesamtlänge der Kurve erhalten wir, indem wir T gegen $+\infty$ streben lassen. Wir erhalten also $L = \sqrt{2}$.

Offene Aufgaben

6. Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

(b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

Lösung:

(a) Für die Fläche erhalten wir nach der bekannten Formel

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos(4\varphi))\,d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

(b) Um die Breite zu bestimmen, benötigen wir die y-Koordinate desjenigen Punktes im ersten Quadranten, an dem die Tangente an der Kurve horizontal ist. Dazu bestimmen wir zunächst die kartesischen Komponenten der Kurve:

$$\begin{aligned}(x(\varphi), y(\varphi)) &= (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\\ &= (a\cos(\varphi)|\cos(2\varphi)|, a\sin\varphi|\cos(2\varphi)|)\,.\end{aligned}$$

Aus der Skizze wird klar, dass wir einen Punkt mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$ suchen. Dort ist also $\cos(2\varphi) > 0$, und wir finden

$$\begin{aligned}0 = \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi}(a\sin\varphi\cos(2\varphi)) = a\cos\varphi\cos(2\varphi) - 2a\sin\varphi\sin(2\varphi)\\ &= a\left[\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4\sin^2\varphi\cos\varphi\right] = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi\right)\\ &= a\cos\varphi\left(1 - 6\sin^2\varphi\right).\end{aligned}$$

Die einzige Lösung hiervon im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ ist

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}},$$

und die Breite ergibt sich zu

$$\begin{aligned}b = 2y(\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0\cos(2\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0(1 - 2\sin^2\varphi_0) = \frac{2a}{\sqrt{6}}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\\ = \frac{4a}{3\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

7. Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \le \varphi \le 2\pi$ einschliessen.

(a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

(b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

(c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi}^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}4\pi^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen

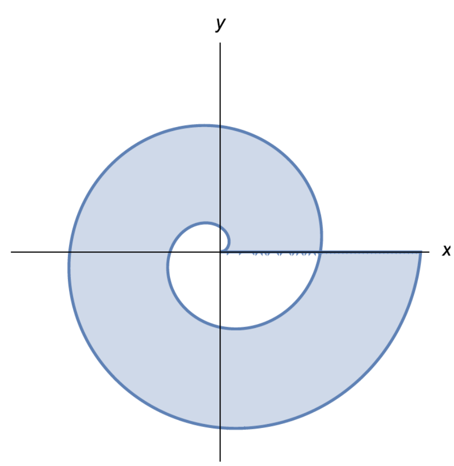
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+\varphi}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+4\pi}. \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $\sin(\varphi)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi))$.

8. Es sei die Spirale $\rho(\varphi) = \varphi$ in Polarkoordinaten gegeben. Berechnen Sie den Inhalt des schattierten Flächenstückes, das eingeschlossen wird von der x-Achse und den Stücken der Kurve mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$.

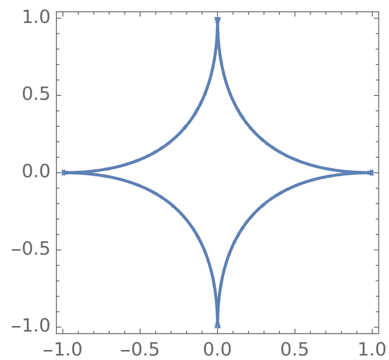


Lösung: Die schraffierte Fläche ist die Sektorfläche der Spirale zwischen 2π und 4π abzüglich der Sektorfläche zwischen 0 und 2π. Wir rechnen in Polarkoordinaten ρ, φ und erhaltendamit die Formel

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \rho(\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \rho(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \varphi^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{3}(\varphi^3|_{2\pi}^{4\pi} - \varphi^3|_{0}^{2\pi}) = \frac{\pi^3}{6}(64 - 8 - 8 + 0) = 8\pi^3. \end{aligned}$$

9. Berechnen Sie die Fläche F des durch die ebene Kurve $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ begrenzten Bereichs.

Hinweis: Eine im ersten Quadranten gültige Parametrisierung der Kurve ist durch $t \mapsto (\cos^4(t), \sin^4(t))$ mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Verwenden Sie Symmetrien!

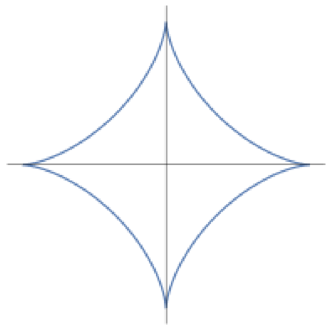


Lösung: Wegen der Spiegelungssymmetrie an der x- und y-Achse gilt wieder $F = 4A$, wobei F die Fläche der Figur ist und A die Fläche der Figur im ersten Quadranten ist. Mit der Formel für Flächen unter parametrisierten Kurven gilt:

$$\begin{aligned} A = -\int_0^{\pi/2} \sin^4(t) \cdot \frac{d}{dt}(\cos^4(t))\ dt &= 4\int_0^{\pi/2} \sin^5(t)\cos^3(t)\ dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sin^5(t)(1 - \sin(t)^2)\cos(t)\ dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sin^5(t)\cos(t)\ dt - 4\int_0^{\pi/2} \sin^7(t)\cos(t)\ dt \\ &= 4\left[\frac{1}{6}\sin^6(t)\right]_0^{\pi/2} - 4\left[\frac{1}{8}\sin^8(t)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4}{6} - \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Also ist $F = 4A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

10. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a:

(a) die Bogenlänge der Astroide;

(b) die Fläche des Astroidensterns;

(c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird.

Erinnerung: (für Teilaufgabe b)) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Es wurde auch die folgende Formel gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

Lösung:

(a) Für unsere Rechnungen nützen wir immer wieder die vorhandene Symmetrie aus; im ersten Quadranten läuft der Parameter t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und die gesamte Bogenlänge ist das Vierfache der Bogenlänge im ersten Quadranten, analog für die Fläche.
Mit $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ und $\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ ergibt sich für die Bogenlänge der Astroide

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 12a\left[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

(b) Die Fläche des Astroidensterns ist

$$
\begin{aligned}
F &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t))\,dt \\
&= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t(1-\cos^2 t) + (1-\sin^2 t)\sin^4 t)\,dt \\
&= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t - \cos^6 t + \sin^4 t - \sin^6 t\,dt
\end{aligned}
$$

Wenn wir

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

schreiben, dann haben wir zusammen mit der Notation aus dem Hinweis

$$F = 6a^2(J_4 - J_6 + I_4 - I_6).$$

Wir widmen uns nun dem Hinweis und zeigen, dass $I_n = J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \\
&\underset{du=dx}{\overset{u=x-\frac{\pi}{2}}{=}} \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos^n(u)du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u)du \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)du = J_n,
\end{aligned}
$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt haben, dass der Kosinus eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$.
Damit gilt nun

$$F = 12a^2(I_4 - I_6).$$

Verwenden wir die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

zusammen mit dem Ergebnis $I_2 = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir

$$I_4 = \frac{3}{16}\pi, \quad I_6 = \frac{15}{96}\pi.$$

Somit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$F = 12a^2\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{15\pi}{96}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(c) Der Schnitt des Körpers mit einer Ebene parallel zur (y, z)-Ebene ist ein Kreis.
Die implizite Darstellung der Kurve ist gegeben durch

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie man aus der Parameterdarstellung ablesen kann. Um den Radius des Schnittkreises zu berechnen, bestimmen wir lokal die explizite Darstellung zu $y(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, welche für $0 \leq x \leq a$ gilt und damit die Kurve im ersten Quadranten beschreibt. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot y(x)^2$, also erhalten wir als Volumen

$$V = 2\int_0^a \pi y(x)^2 \, dx = 2\int_0^a \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$$

Nun substituieren wir $u = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$, wir erhalten $x = au^{\frac{3}{2}}$ und $dx = \frac{3}{2}a\sqrt{u}du$ mit den Grenzen 0 und 1. Also gilt

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2 \cdot \tfrac{3}{2}a \int_0^1 (1-u)^3 \sqrt{u}\, du \\ &= 3\pi a^3 \int_0^1 (1 - 3u + 3u^2 - u^3)u^{\frac{1}{2}} \, du = 3\pi a^3 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{7}{2}} \, du \\ &= 3\pi a^3 \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$