Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 11

MC-Aufgaben

1. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht.

√ (a) $2\pi(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$

(b) $2\pi(\log(1+\sqrt{2})+2)$

(c) 0

(d) $\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$

Lösung:
Mit Hilfe der Parametrisierung

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = \cos(x(t)) = \cos t \quad , \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

erhalten wir nach der allgemeinen Formel die Oberfläche

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,du = 2\pi \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{u^2+1}\right)\right]_{u=-1}^{u=1} \\ &= \pi\left[\operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}(-1) + \sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right)\right] = 2\pi\left(\operatorname{arsinh}(1)+\sqrt{2}\right) \\ &= 2\pi\left[\log\left(1+\sqrt{1^2+1}\right)+\sqrt{2}\right] = 2\pi\left[\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right]. \end{aligned}$$

Wir haben dabei $u = \sin t$ substituiert.

2. Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t} \left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

√ (b) 3.664

(c) 84.792

Es ist

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-t} \sin(2t)\sqrt{5}e^{-t}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{5} \int_0^{\pi/2} e^{-2t} \sin(2t) dt = 2\sqrt{5}\pi \frac{e^{-2t}}{4+4}(-2\sin(2t) - 2\cos(2t))\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1) \approx 3.664, \end{aligned}$$

wobei die Formel

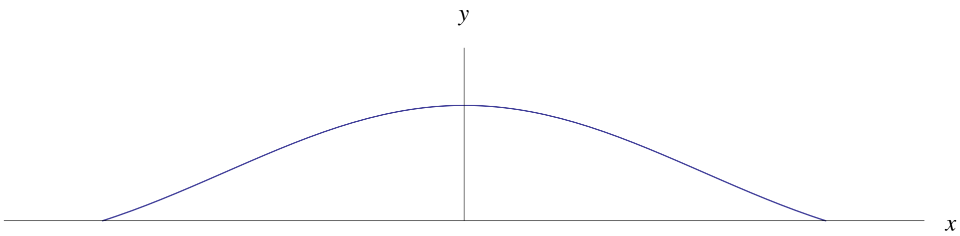
$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin(bx) - b\cos(bx)) + C \quad , \quad a, b, C \in \mathbb{R}$$

benutzt wurde. Sie lässt sich mittels partieller Integration herleiten.

3. Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

√ (d) 4π

Wir zerlegen den Körper in dünne Hohlzylinder mit Innenradius x und Aussenradius $x + dx$. Ein solcher Hohlzylinder hat den Umfang $2\pi x$, die Höhe $\frac{\sin x}{x}$ und die Dicke dx, also das Volumen

$$dV = 2\pi x \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\pi \sin x\, dx.$$

Das Gesamtvolumen ist somit

$$V = \int_0^\pi dV = 2\pi \int_0^\pi \sin x\, dx = 4\pi.$$

4. Liegt der Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers immer auf dessen Rotationsachse?

(a) Nein. Dies würde im Umkehrschluss bedeuten, dass sich alle Rotationsachsen eines Körpers in einem Punkt schneiden müssten, was nicht immer der Fall ist.

√ (b) Ja. Andernfalls würde der Schwerpunkt nach der Rotation nicht mehr derselbe sein – er ist aber eindeutig.

5. Es sei B_α (für $0 < \alpha < 1$) die von den beiden Parabelbögen $x - y^2 = 0$ und $x - \alpha\, y^2 = 1$ berandete Fläche. Für welche α liegt der Schwerpunkt von B_α ausserhalb der Fläche B_α?

(a) $\alpha < \frac{2}{3}$

✓ (b) $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

(c) $\alpha < \frac{3}{4}$

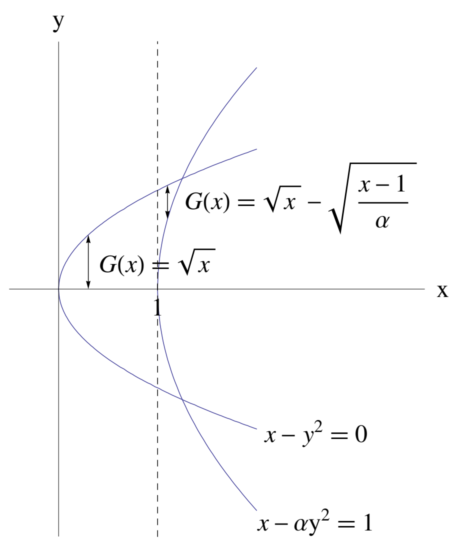
(d) $\frac{3}{4} < \alpha < 1$

(e) $\alpha < 1$

Wir benutzen die Formel aus dem Stammbach–Skript, Kapitel III, und erhalten $y_{\mathrm{s}} = 0$ (wegen Symmetrie) und

$$x_{\mathrm{s}} = \frac{1}{A_\alpha} \int_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x\, G(x)\, dx,$$

wobei A_α der Flächeninhalt von B_α ist.



Es gilt

$$G(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\dfrac{x-1}{\alpha}}\right) & \text{für } 1 \le x \le \dfrac{1}{1-\alpha} \end{cases}$$

und A_α kann als Differenz den Flächen zwischen den Funktionen $x = y^2$ und $x = 1 - ay^2$ und der y-Achse berechnet werden. Diese zwei Funktionen schneiden sie sich für $y = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$ und so

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} 1 + \alpha y^2 dy - \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} y^2 dy \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} 1 + y^2(\alpha - 1) dy \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Dann berechnen wir

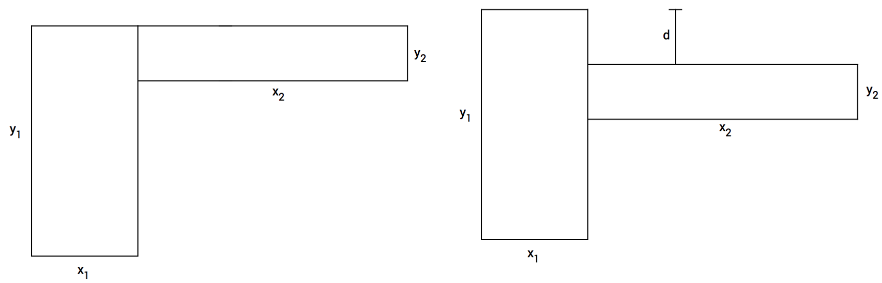
$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{A_\alpha}\left(\int\limits_0^1 x\,2\sqrt{x}\,dx + \int\limits_1^{\frac{1}{1-\alpha}} x\,2\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x-1}{\alpha}}\right)dx\right)\\
&= \frac{1}{A_\alpha}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x\,2\sqrt{x}\,dx - \int\limits_1^{\frac{1}{1-\alpha}} x\,2\sqrt{\frac{x-1}{\alpha}}\,dx\right)\\
&\overset{u=x-1}{=} \frac{1}{A_\alpha}\left(\frac{4}{5}\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (u+1)\sqrt{u}\,du\right)\\
&= \frac{1}{A_\alpha}\left(\frac{4}{5}\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{4}{5}\Big(\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{4}{3}\Big(\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big)^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{3}{5}\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{3}{5}\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\\
&= \frac{1}{5}\Big(\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}\Big).
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt von B_α liegt ausserhalb der Fläche B_α

$$\iff x_s > 1 \iff 3-2\alpha > 5-5\alpha \iff 3\alpha > 2 \iff \alpha > \frac{2}{3}.$$

Also $\frac{2}{3} < \alpha < 1$.

6. Betrachten Sie die folgenden Figuren, die beide aus den selben zwei homogenen Rechtecken zusammengesetzt sind und sich nur in der Platzierung des rechten (liegenden) Rechtecks unterscheiden (dieses ist um d nach unten versetzt):



Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$. Welche Aussagen über die Schwerpunkte S_1 (der linken Figur) und S_2 (der rechten Figur) sind wahr?

√ (a) Die x-Koordinaten von S_1 und S_2 stimmen überein.

(b) Die Länge (bedeutet Ausdehnung in x-Richtung) des rechten (liegenden) Rechtecks kann so gewählt werden, dass die y-Koordinaten von S_1 und S_2 übereinstimmen.

(c) Die Differenz der y-Koordinaten von S_1 und S_2 beträgt d.

Die erste Aussage ist wahr, da das Rechteck nur entlang der y-Achse bewegt wird und die Formel zur Bestimmung der x-Koordinate des Schwerpunkts,

$$x_S = \frac{\int xG(x)\,\mathrm{d}x}{\int G(x)\,\mathrm{d}x},$$

nur die jeweilige Ausdehnung in y-Richtung, nicht aber deren Lage, verwendet.

Intuitiv lassen sich die nächsten beiden Aussagen folgendermassen entkräften: Falls überdies auch die y-Koordinaten übereinstimmten, so wären die beiden Schwerpunkte ident, was absurd anmutet, also sollte die zweite Aussage falsch sein. Da der Schwerpunkt nicht nur vom rechten, sondern auch vom linken Rechteck abhängt, sollte die Masse des linken Rechtecks die Bewegung des Schwerpunkts entlang der y-Richtung in Relation zur Bewegung des rechten Rechtecks verlangsamen – dass der Schwerpunkt also im gleichen Ausmass wie das Rechteck bewegt wird scheint unlogisch, womit die dritte Aussagen widerlegt wäre.

Nun validieren wir unsere mathematische Intuition. Nehmen wir dazu an, dass die linke untere Ecke des linken (stehenden) Rechtecks im Ursprung platziert ist und (wie schon in der Abbildung beschriftet), dass das linke Rechteck eine Länge von x_1 und eine Höhe von y_1, das rechte Rechteck eine Länge von x_2 und eine Höhe von y_2 hat. In der Folge berechnen wir die y-Koordinate von S_1. Es gilt

$$H_1(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 \leq y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_1} = \frac{\int_0^{y_1} yH_1(y)\,\mathrm{d}y}{\int_0^{y_1} H_1(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{x_1 y_1^2 + x_2(2y_1 y_2 - y_2^2)}{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die y-Koordinate von S_2. Diesmal gilt

$$H_2(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2 - d, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 - d \leq y \leq y_1 - d, \\ x_1 & \text{für } y_1 - d < y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_2} = \frac{\int_0^{y_1} yH_2(y)\,\mathrm{d}y}{\int_0^{y_1} H_2(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{x_1y_1^2 + x_2(2(y_1-d)y_2 - y_2^2)}{2(x_1y_1 + x_2y_2)}.$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass die y-Koordinaten nur übereinstimmen, falls $d = 0$ gilt. Dies ist aber ausgeschlossen. Ausserdem ist die Differenz der y-Koordinaten gleich

$$y_1 - y_2 = \frac{x_2y_2d}{x_1y_1 + x_2y_2} = \left(1 - \frac{x_1y_1}{x_1y_1 + x_2y_2}\right) d < d,$$

wie gewünscht.

Offene Aufgaben

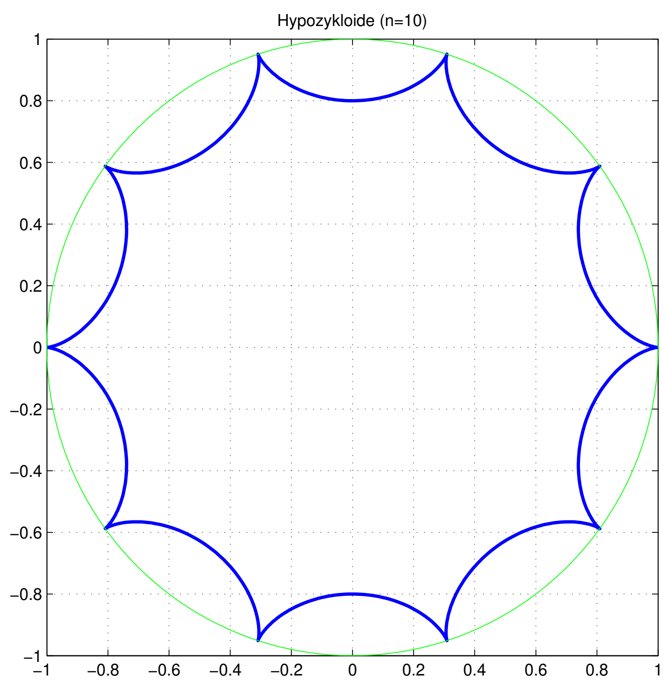
7. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$

$$x(\phi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\phi + \cos((n-1)\phi)),$$
$$y(\phi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\phi - \sin((n-1)\phi))$$

beschrieben wird.

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

(b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?



Lösung:

(a) Nach der Berechnung der Ableitungen von x und y erhält man

$$\begin{aligned} x(\phi)\dot{y}(\phi) &= \frac{n-1}{n^2}\big((n-1)\cos^2\phi - (n-2)\cos\phi\cos((n-1)\phi) - \cos^2((n-1)\phi)\big)\,, \\ \dot{x}(\phi)y(\phi) &= -\frac{n-1}{n^2}\big((n-1)\sin^2\phi + (n-2)\sin\phi\sin((n-1)\phi) - \sin^2((n-1)\phi)\big)\,. \end{aligned}$$

Aus der Beziehung $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ erhalten wir für $\alpha = \phi$ und $\beta = (n-1)\phi$ die Gleichung

$$\cos(\phi)\cos((n-1)\phi) = \cos(n\phi) + \sin(\phi)\sin((n-1)\phi);$$

Daraus erhalten wir

$$x(\phi)\dot{y}(\phi) - \dot{x}(\phi)y(\phi) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1-\cos n\phi).$$

Die gesuchte Fläche ist somit gegeben durch die Formel für die Sektorfläche und wir erhalten

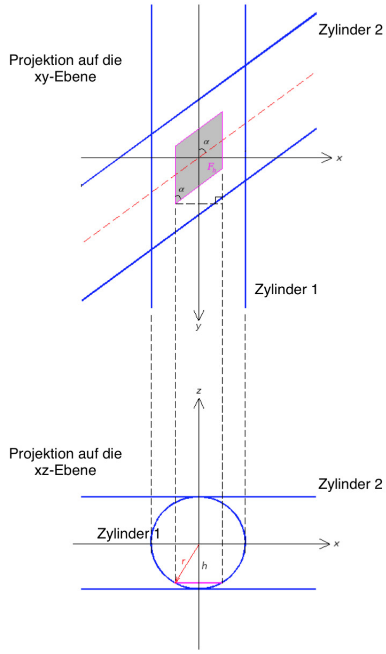
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(\phi)\dot{y}(\phi) - \dot{x}(\phi)y(\phi)\,d\phi = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\phi)\,d\phi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\left[\phi - \frac{\sin n\phi}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

(b) Der grosse Kreis hat Fläche π; gesucht sind also die Zahlen $n = 3, 4, \ldots$, für welche das Folgende gilt:

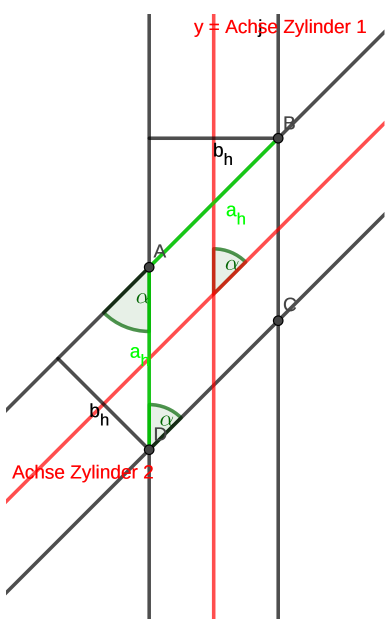
$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2} > \frac{2}{3}\pi \\ \iff \quad & 3n^2 - 9n + 6 > 2n^2 \\ \iff \quad & n(n-9) + 6 > 0 \\ \iff \quad & n = 9, 10, \ldots \end{aligned}$$

8. Zwei gerade Kreiszylinder Z_1 und Z_2 mit gleichem Grundkreisradius r durchdringen einander derart, dass sich ihre Achsen schneiden und den Winkel α einschliessen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $Z_1 \cap Z_2$.

Hinweis: Zerschneiden Sie den Körper durch Ebenen, welche zu beiden Achsen parallel sind.

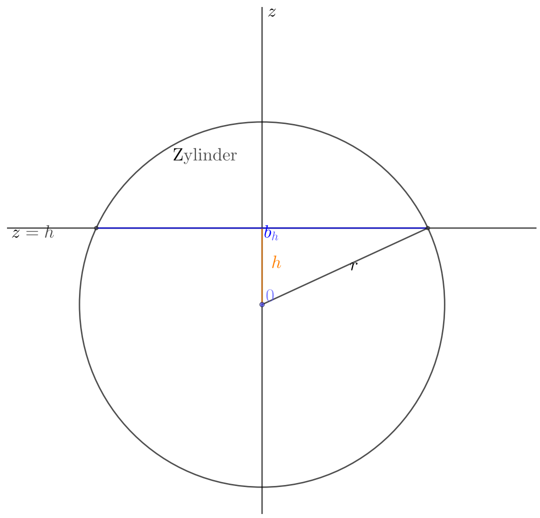


Lösung: Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die Zylinderachsen in der xy-Ebene liegen, wobei eine von denen mit der y-Achse übereinstimmt. Aus dem folgenden Bild lässt sich herleiten, dass der Durchschnitt von $Z_1 \cap Z_2$ mit der Ebene $z = h$ $(-r \leq h \leq r)$ ein Rhombus ist:



Sei a_h die Seitenlänge des Rhombus und b_h die Breite der Streifen, die durch $Z_i \cap \{z = h\}$ für $i \in \{1, 2\}$ gegeben sind. Es gilt $a_h = \frac{b_h}{\sin \alpha}$. Die Fläche des Rhombus ist gegeben durch $F_h = \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} a_h \, dx = b_h a_h = \frac{b_h^2}{\sin \alpha}$.

Zur Berechnung von b_h betrachten wir das folgende Bild, dass einen Zylinder geschnitten mit einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse zeigt. Es gilt $\left(\frac{b_h}{2}\right)^2 + h^2 = r^2$, also $b_h = 2\sqrt{r^2 - h^2}$. Es folgt, dass $F_h = \frac{b_h^2}{\sin \alpha} = \frac{4(r^2 - h^2)}{\sin \alpha}$.



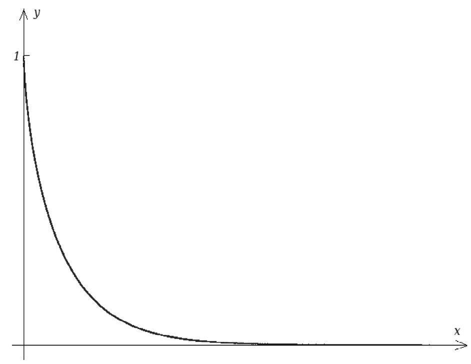
Um das Volumen V von $Z_1 \cap Z_2$ zu bestimmen, integrieren wir entlang der z-Achse über die Fläche von $Z_1 \cap Z_2 \cap \{z = h\}$. Es gilt also

$$V = \int_{-r}^{r} F_h \, dh = \int_{-r}^{r} \frac{4}{\sin \alpha}(r^2 - h^2) \, dh = \frac{4}{\sin \alpha}(2r^3 - \frac{2}{3}r^3) = \frac{16}{3 \sin \alpha} r^3.$$

9. Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}}\, \mathrm{d}u,\, e^{-s} \right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



(a) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T.

(b) Bestimmen Sie das Volumen des von dieser Rotationsfläche und den zwei Kreisscheiben

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

bzw.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(T), y^2 + z^2 \leq e^{-T}\}$$

begrenzten Körpers, in Abhängigkeit von T.

(c) Was passiert, wenn T gegen unendlich strebt?

Lösung:

(a) Für die Berechnung des Oberflächeninhaltes wenden wir die Formel

$$F = 2\pi \int_0^T y(s) \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}\, \mathrm{d}s$$

an. Die Ableitungen von x und y sind:

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= \sqrt{1 - e^{-2s}} \quad \text{(Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)} \\ \dot{y}(s) &= -e^{-s} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s^2)} = \sqrt{1 - e^{-2s} + e^{-2s}} = 1$. Mit diesen Daten berechnen wir jetzt den Flächeninhalt.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^T e^{-s} \cdot 1\, \mathrm{d}s = 2\pi \int_0^T e^{-s}\, \mathrm{d}s \\ &= -2\pi\, e^{-s}\Big|_0^T = 2\pi \left(1 - e^{-T}\right). \end{aligned}$$

(b) Das Volumen lässt sich durch die folgende Formel bestimmen:

$$V = \pi \int_0^T y^2 dx = \pi \int_0^T y(s)^2\, \dot{x}(s)\, \mathrm{d}s.$$

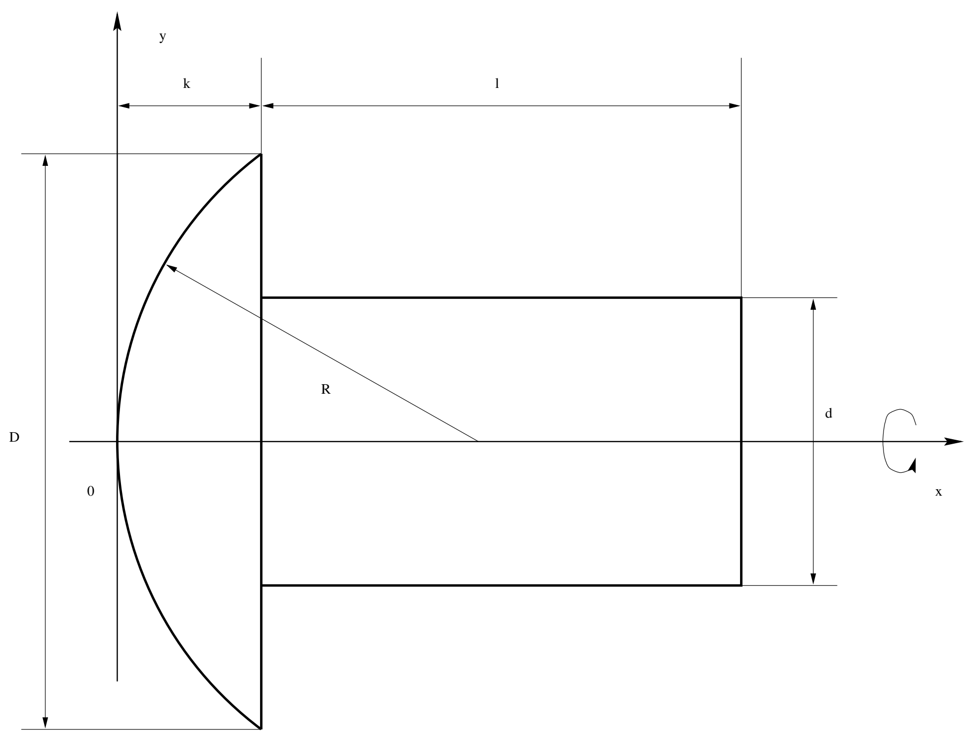
Also,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^T e^{-2s}\sqrt{1-e^{-2s}}\,\mathrm{d}s = \pi \int_0^T e^{-2s}\sqrt{1-e^{-2s}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{1-e^{-2T}} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_0^{1-e^{-2T}} \\
&= \frac{\pi}{3}\left(1-e^{-2T}\right)^{3/2},
\end{aligned}
$$

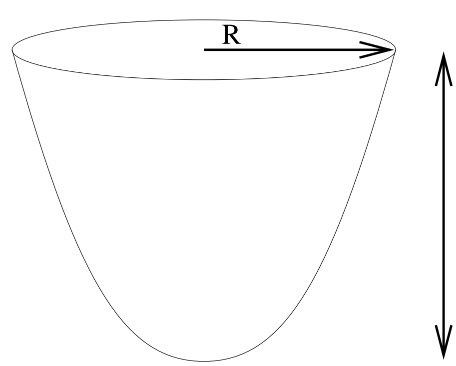
wobei die Substitution $u = 1 - e^{-2s}$ angewandt wurde.

(c) Wenn T gegen unendlich strebt, strebt e^{-T} gegen 0. Demnach nähert sich die Fläche dem Wert 2π, das Volumen dem Wert $\pi/3$ an.

10. (a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des in der Figur dargestellten homogenen Halbrundniets. Es sind $d = 16$mm, $D = 28$mm, $k = 11.5$mm und $l = 80$mm.



(b) Betrachten Sie das Rotationsparaboloid, das durch Rotation der Kurve $z = ax^2$ um die z-Achse gegeben ist:



Auf welcher Höhe liegt der Körperschwerpunkt?

Lösung:

(a) Dank dem Satz von Pythagoras haben wir

$$(R-k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2$$

und somit

$$R = \frac{D^2}{8k} + \frac{k}{2}.$$

Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\int_0^k \left(\sqrt{R^2-(R-x)^2}\right)^2 dx + \int_k^{k+l} \left(\frac{d}{2}\right)^2 dx \right] \\ &= \pi \left[\int_0^k (2Rx - x^2)\, dx + \int_k^{k+l} \frac{d^2}{4}\, dx \right] = \pi \Big(Rk^2 - \frac{k^3}{3} + \frac{d^2 l}{4} \Big) \\ &= \pi \Big(\frac{D^2 k}{8} + \frac{k^3}{6} + \frac{d^2 l}{4} \Big) = \frac{\pi}{24} \left(3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l \right). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die y- und z-Komponenten des Schwerpunktes $y_S = z_S = 0$. Für die x-Komponente bekommen wir

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{V}\pi \left[\int_0^k x(2Rx - x^2)\, dx + \int_k^{k+l} x \left(\frac{d}{2}\right)^2 dx \right] \\ &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{2Rk^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2}{8} \left((k+l)^2 - k^2 \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{D^2 k^2}{12} + \frac{k^4}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2 kl}{4} + \frac{d^2 l^2}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{24V} \left(2D^2k^2 + 2k^4 + 6d^2 kl + 3d^2 l^2 \right) = \frac{2D^2k^2 + 2k^4 + 3d^2 l(2k+l)}{3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l} \\ &\approx 42\text{mm}. \end{aligned}$$

(Bemerkung: Bedenken Sie, dass die Angabe von mehr Nachkommastellen (etwa 42.1166 mm) hier nicht sinnvoll ist, denn die Grössen d, D und l sind auch nicht genauer als mit zwei Dezimalstellen angegeben.)

(b) Die Kurve $z = ax^2$ wird um die z-Achse gedreht. Für den Radius gilt dann $r^2 = x^2 + y^2$ und für die Höhe $z = ar^2$.
Schnittfläche bei z: $F(z) = \pi r^2 = \pi \frac{z}{a}$
Volumenelement bei z: $dV = F(z)dz = \pi \frac{z}{a} dz$
Der Schwerpunkt liegt auf der z-Achse mit Höhe h.

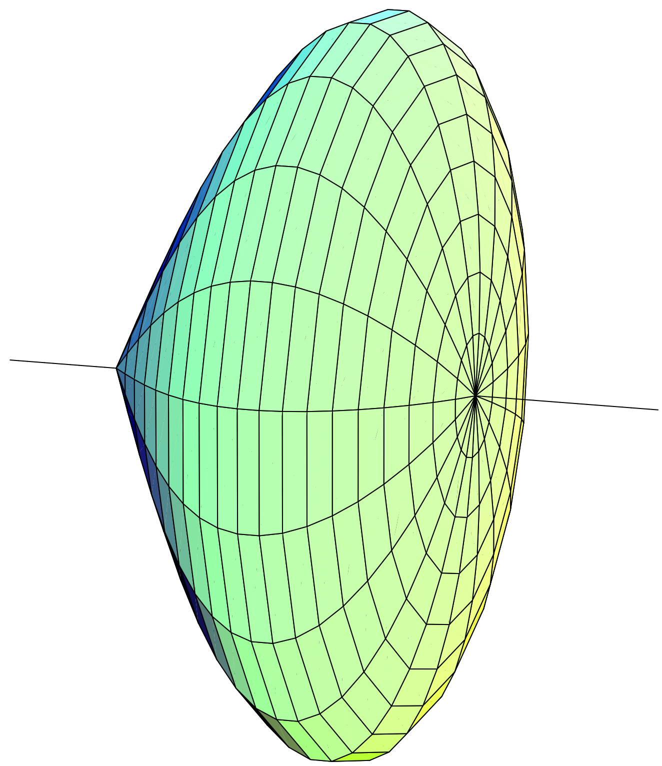
$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} z dV, \qquad \text{wobei } V = \int_0^{aR^2} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z^2 dz = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} z^3 \Big|_0^{aR^2} = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} a^3 R^6 = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 \\ V &= \int_0^{aR^2} dV = \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z dz = \frac{\pi}{2a} z^2 \Big|_0^{aR^2} = \frac{\pi}{2} a R^4 \\ \Rightarrow h &= \frac{2}{\pi} a^{-1} R^{-4} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 = \frac{2}{3} a R^2 = \frac{2}{3} H \end{aligned}$$

11. (a) Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s, Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie der Platte?

(b) Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \qquad (\text{für } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger, homogener Körper mit homogener Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.



Lösung:

(a) Für die in der Zeichnung (siehe nächste Seite) oben rechts liegende Kante der Platte gilt die Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,s - x$. In einem Streifen der Breite dx liegt also die kleine Masse

$$dm = 2y\sigma\,dx = 2\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,s - x\right)\,dx.$$

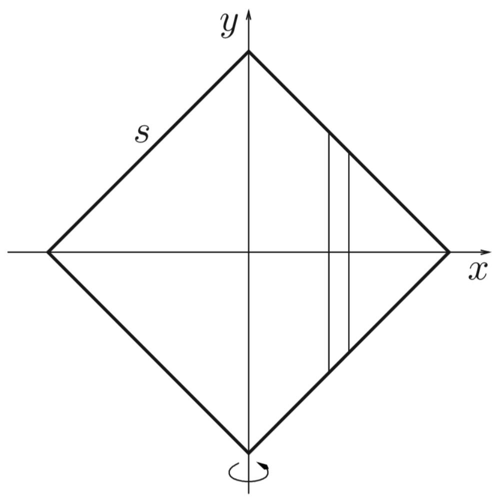
Daraus erhält man als Anteil der kinetischen Energie

$$dT = \frac{1}{2}\,v^2\,dm = \frac{1}{2}\,\omega^2 x^2\,dm = \sigma\omega^2 x^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,s - x\right)\,dx\,.$$

Die gesamte kinetische Energie ist folglich

$$T = 2\int\limits_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \sigma\omega^2 x^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x\right)\,dx = 2\sigma\omega^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{24}\,\sigma\omega^2 s^4.$$

Den Faktor 2 benötigen wir, um auch die linke Hälfte der Platte zu berücksichtigen.



(b) Wir bestimmen zuerst eine explizite Darstellung der Kurve. Es ist

$$y = \sin(2t) = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(ein Stück einer Lemniskate bzw. Lissajous-Figur). Das Trägheitsmoment berechnet sich dann gemäss Buch, Kapitel III.12, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 \Big(2x\sqrt{1-x^2}\Big)^4 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 16x^4(1-x^2)^2\,dx \\
&= 8\pi\int_0^1 \big(x^4 - 2x^6 + x^8\big)\,dx = 8\pi\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_0^1 \\
&= 8\pi\Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{64\pi}{315}.
\end{aligned}$$

Alternative: Das Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe mit Radius r ist $\frac{1}{2}\pi r^4$. Zerschneiden wir die Zwiebel in solche Scheiben vom Radius $y(t)$ und Dicke $dx = \dot{x}(t)dt$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi/2} y(t)^4|\dot{x}(t)|\,dt = \frac{1}{2}\pi\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^4(2t)}_{=16\cos^4 t\sin^4 t = 16\cos^4 t\,(1-\cos^2 t)^2} \sin t\,dt \\
&= 8\pi\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,(1-\cos^2 t)^2 \sin t\,dt \\
&\underset{du=-\sin t dt}{\overset{u=\cos t}{=}} 8\pi\int_1^0 u^4(1-u^2)^2\,(-1)\,du = 8\pi\Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{64\pi}{315}.
\end{aligned}$$