D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 13

MC-Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3y^2$. Man setze sich in den Punkt $(-1, 1)$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch?*

(a) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

(b) Man stellt in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.

(c) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

(d) Man stellt in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.

√ (e) Man stellt in Richtung von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\operatorname{grad} f(1, -1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung im Punkt $(1, -1)$ in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{e}$ ist somit gegeben durch

$$D_{\vec{e}} f(1, -1) = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} f(1, -1) = \vec{e} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir für $\vec{e}$ die ensprechenden Werte einsetzen. Ist das Resultat positiv, so ist in diese Richtung eine Zunahme der Funktionswerte festzustellen und umgekehrt.

(a) Falsch: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $D_{\vec{e}} f(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Falsch: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $D_{\vec{e}} f(1, -1) = -2$.

(c) Falsch: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $D_{\vec{e}} f(1, -1) = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

(d) Falsch: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D_{\vec{e}} f(1, -1) = 3$.

(e) Richtig: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $D_{\vec{e}} f(1, -1) = \frac{-5}{\sqrt{2}}$.

2. Die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 - y^2$ im Punkt (2,1,3) lautet

√ (a) $4x - 2y - z = 3$.

(b) $2x + 4y - z = 1$.

(c) $2x + 4y - z = 5$.

(d) $4x + 2y - z = 3$.

Die richtige Antwort lautet (a). Sei $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$. Die Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0) ist:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Es ist

$$f_x(x, y) = 2x\,, \quad f_y(x, y) = -2y \implies f_x(2, 1) = 4\,, \quad f_y(2, 1) = -2.$$

Die gesuchte Tangentialebene hat also die Gleichung

$$z = 3 + 4(x - 2) - 2(y - 1) \quad \text{oder} \quad 4x - 2y - z = 3.$$

3. Sei$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) := c \cdot f(x, y)$. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Falls (x_0, y_0) ein lokales Maximum von g ist, dann auch von f.

(b) Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von g ist, dann auch von f.

√ (c) Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von f ist, dann auch von g.

Da f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, gilt dasselbe auch für g. Somit efüllen alle lokalen Extremalstellen (x_0, y_0) von g die Gleichung

$$\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Falsch: Gilt nicht falls $c \leq 0$. Z.B $c = -1$, dann $g = -f$, die Extremalstellen von f und g sind dann dieselben, jedoch sind die lokalen Maxima von g genau di lokalen Minima von f.

(b) Falsch: Gilt nicht falls $c = 0$. In diesem Fall gilt natürlich $g \equiv 0$ und jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist ein lokales Extremum von g.

(c) Richtig: Jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f erfüllt

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} g(x_0, y_0) = c \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben ist eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) Jede globale Extremastelle ist auch eine lokale Extremastelle.

(b) Jede lokale Extremastelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine globale Extremastelle.

(c) Es gibt immer höchstens eine globale Maximalstelle.

(d) Es gibt immer eine globale Maximalstelle.

(e) Es gibt immer eine lokale Maximalstelle.

(a) Richtig.

(b) Falsch: Ein solches Punkt ist nur ein Kanidat für eine globale Extremalstelle. Man kann sich beispielweise eine Fläche im Raum denken mit verschieden hohen lokalen Maxima.

(c) Falsch: Das globale Maximum kann auch an mehreren Stellen angenommen werden. Beispiel: $f(x, y) = \cos x + \cos y$. Wir haben $\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\sin y \end{pmatrix}$. Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und differenzierbar ist, sind die einzigen Kanididaten für lokale Extrema durch

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, also $(x, y) = (k\pi, j\pi)$ für $k, j \in \mathbb{Z}$. Einsetzten liefert

$$f(k\pi, j\pi) = \cos k\pi + \cos j\pi = \begin{cases} 2, & \text{falls } k \text{ und } j \text{gerade;} \\ -2, & \text{falls } k \text{ und } j \text{ungerade;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gibt es unendlich viele Maximalstellen (und auch Minimalstellen!). Beachten Sie, dass für eine konstante Funktion $f(x, y) = c$, $C \in \mathbb{R}$ ist jede Stelle (x_0, y_0) eine Extremalstelle.

(d) Falsch: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(e) Falsch: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

5. Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen und es seien $x_0, y_0 \in (0,1)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ gilt, so hat f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum an der Stelle (x_0, y_0).

Die Aussage ist falsch, da beispielsweise für $f(x,y) = (x - 1/2)^3$ einerseits

$$f_x(x,y) = 3(x-1/2)^2$$

und andererseits

$$f_y(x,y) = 0$$

gilt. Somit ist $f_x(1/2, 1/2) = f_y(1/2, 1/2) = 0$, der Punkt $(1/2, 1/2)$ ist aber weder eine lokale Maximal-, noch eine lokale Minimalstelle von f. Um dies einzusehen bemerken wir, dass für jede reelle Zahl $r > 0$ die Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $(1/2, 1/2)$ die Punkte $(1/2 + r/2, 1/2)$ und $(1/2 - r/2, 1/2)$ enthält, die der Gleichung

$$f(1/2 + r/2, 1/2) > f(1/2, 1/2) > f(1/2 - r/2, 1/2)$$

genügen.

√ (b) Falls (x_0, y_0) eine lokale Minimalstelle von f ist, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Die Aussage ist wahr. Betrachten Sie dazu den Satz auf Seite 32, Kapitel 4 im Stammbach.

Beachten Sie, dass für $(x_0, y_0) \in [0,1]$ ist die Aussage falsch, denn lokale Extrema können auf dem Rand von $[0,1]$ liegen, wo die Ableitungen von f keineswegs Null sein müssen. (Vergleichen Sie die Situtation bei Extrema von Funktionen einer Variablen.)

(c) Wir definieren $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $u : x \mapsto f(x, y_0)$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $v : y \mapsto f(x_0, y)$. Falls x_0 eine globale Maximalstelle von u und y_0 eine globale Maximalstelle von v ist, dann ist (x_0, y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

Intuitiv sollte klar sein, warum diese Aussage falsch ist. Als Gegenbeispiel stellen wir uns vor, dass wir auf einem Berg stehen, der in keiner der vier Himmelsrichtungen Nord, Süd, West und Ost (also in der x- und y-Richtung) einen höheren Punkt besitzt als den auf dem wir stehen, jedoch in nordöstlicher Richtung ansteigt.

Als mathematisches Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x,y) = (2x-1)(2y-1)$ und den Punkt $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$. In diesem Fall sind die Funktionen u und v beide gleich 0, sie werden also jeweils an der Stelle x_0 bzw. y_0 maximiert; der Punkt (x_0, y_0) ist jedoch keine lokale Maximalstelle von f, da für jedes $r > 0$ der Punkt $(1/2 + r/2, 1/2 + r/2)$ in einer Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $(1/2, 1/2)$ enthalten ist und $f(1/2 + r/2, 1/2 + r/2) > 0$ gilt.

√ (d) Angenommen, es existieren Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $f(x,y) = u(x) + v(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$ gilt. Falls x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, so ist (x_0, y_0) eine globale Minimalstelle von f.

Da x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, gilt für alle $x_1, y_1 \in [0,1]$

$$u(x_1) \geq u(x_0)$$

und

$$v(y_1) \geq v(y_1).$$

Foglich ist

$$f(x_1, y_1) = u(x_1) + v(y_1) \geq u(x_0) + v(y_0) = f(x_0, y_0)$$

und somit ist (x_0, y_0) eine globale Minimalstelle von f.

Offene Aufgaben

6. Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

durch den Punkt $(0,0,0)$ gehen.

Lösung: Sei

$$G(x,y) := y\, f\big(\frac{x}{y}\big).$$

Dann ist die Fläche $z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$ gleich wie der Graph von G.

Es gilt

$$G_x(x,y) = f'\big(\frac{x}{y}\big) \quad , \quad G_y(x,y) = f\big(\frac{x}{y}\big) - \frac{x}{y} f'\big(\frac{x}{y}\big).$$

Die Tangentialebene im Punkte $(x_0, y_0, G(x_0,y_0))$ (mit $y_0 \neq 0$) ist

$$\begin{aligned}
z &= G(x_0,y_0) + G_x(x_0,y_0)(x-x_0) + G_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&= y_0 f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)(x-x_0) + \left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right](y-y_0)\\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right]\\
&\quad + \underbrace{y_0 f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - x_0 f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - y_0\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right]}_{=0}\\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right].
\end{aligned}$$

Der Punkt $(0,0,0)$ erfüllt diese Gleichung, das bedeutet, dass $(0,0,0)$ auf diesen Tangentialebenen liegt, d. h. alle Tangentialebenen gehen durch den Nullpunkt.

7. (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ im Punkt $(1,2,5)$.

(b) Bestimmen Sie alle Tangentialebene an das elliptische Paraboloid $z = 2x^2 + \frac{y^2}{4}$, welche parallel zur Ebene $E : x + y + z = 1$ sind.

Lösung:

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0) ist

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0).$$

Es ist $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$ und so $f_x(1,2) = 2$ $f_y(1,2) = 4$. Die gesuchte Tangentialebene hat die Gleichung

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) \quad \text{das heisst} \quad 2x + 4y - z = 5.$$

(b) Wir nutzen aus, dass zwei Ebenen genau dann parallel sind, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind. Setzen wir

$$f(x,y) := 2x^2 + \frac{y^2}{4},$$

so hat die Tangentialebene an den Graphen von f (das ist das gegebene Paraboloid) über dem Punkt (x_0, y_0) die Gleichung

$$z = 2x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} + 4x_0(x - x_0) + \frac{y_0}{2}(y - y_0) = -2x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} + 4x_0 x + \frac{y_0}{2} y.$$

Der Normalenvektor einer solchen Tangentialebene ist damit $(4x_0, \frac{y_0}{2}, -1)$ und dieser muss parallel zum Normalenvektor $(1,1,1)$ der Ebene E sein. D.h. es muss für eine reelle Zahl λ

$$(4x_0, \frac{y_0}{2}, -1) = \lambda(1,1,1)$$

gelten. Es folgt, dass $\lambda \overset{!}{=} -1$ und deshalb $x_0 = \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{4}$, $y_0 = 2\lambda = -2$.
Einsetzen in die Gleichung der Tangentialebene führt zu

$$z = -2\frac{1}{16} - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}x - \frac{2}{2}y = -x - y - \frac{9}{8}, \text{ d.h. } x + y + z = -\frac{9}{8}.$$

Also ist nur die Tangentialebene $x+y+z = -\frac{9}{8}$ (über dem Punkt $(-\frac{1}{4}, -2, \frac{9}{8})$) parallel zur Ebene $x + y + z = 1$.

8. Der für beliebige Dreiecke ABC gültige Kosinussatz lautet $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Schätzen Sie den relativen Fehler von c ab, wenn die Grössen a und b auf 1% und γ auf 0.5° genau gemessen werden.

Lösung: Auflösen der Gleichung liefert zunächst

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Fasst man c als Funktion in den Variablen a, b und γ auf, so hat man die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} c_a(a,b,\gamma) &= \frac{2a - 2b\cos\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{a - b\cos\gamma}{c}, \\ c_b(a,b,\gamma) &= \frac{2b - 2a\cos\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{b - a\cos\gamma}{c}, \\ c_\gamma(a,b,\gamma) &= \frac{2ab\sin\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{ab\sin\gamma}{c}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$dc = \frac{a - b\cos\gamma}{c}\, da + \frac{b - a\cos\gamma}{c}\, db + \frac{ab\sin\gamma}{c}\, d\gamma$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{dc}{c} &= \frac{a - b\cos\gamma}{c^2}\, da + \frac{b - a\cos\gamma}{c^2}\, db + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\, d\gamma \\ &= \frac{a^2 - ab\cos\gamma}{c^2}\, \frac{da}{a} + \frac{b^2 - ab\cos\gamma}{c^2}\, \frac{db}{b} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\, d\gamma \\ &= \left(\frac{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}{2c^2} + \frac{a^2-b^2}{2c^2}\right)\frac{da}{a} + \left(\frac{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}{2c^2} + \frac{b^2-a^2}{2c^2}\right)\frac{db}{b} \\ &\quad + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\, d\gamma \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2-b^2}{c^2}\right)\frac{da}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2-b^2}{c^2}\right)\frac{db}{b} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\, d\gamma. \end{aligned}$$

Der relative Fehler ist also annähernd

$$\begin{aligned}\frac{\Delta c}{c} &\approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2-b^2}{c^2}\right)\frac{\Delta a}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2-b^2}{c^2}\right)\frac{\Delta b}{b}+\frac{ab\sin\gamma}{c^2}\Delta\gamma \\ &= \frac{\Delta a}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2-b^2}{c^2}\right)\left(\frac{\Delta b}{b}-\frac{\Delta a}{a}\right)+\frac{ab\sin\gamma}{c^2}\Delta\gamma \\ &= \frac{1}{100}+\frac{ab\sin\gamma}{c^2}\frac{\pi}{360}.\end{aligned}$$

9. Gegeben ist die Funktion

$$f:(x,y)\mapsto \frac{y}{x^2+y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f.

(b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen sie für die Funktionenswerte $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ und 1 auf.

(c) Berechnen Sie die lineare Ersatzfunktion von f im Punkt $(1,1)$.

(d) Die Grössen x und y seien in der Nähe von $(1,1)$ und werden auf 1% genau gemessen. Schätzen Sie den relativen Fehler der Grösse $z=f(x,y)$ ab.

(e) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen von f und überprüfen Sie den Satz von Schwarz.

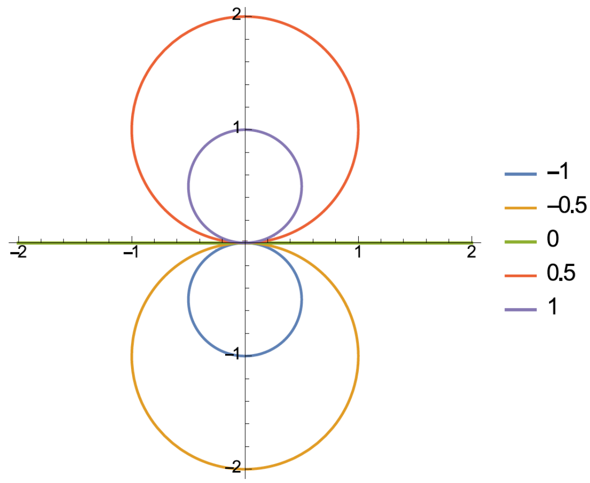
Lösung:

(a) Zunächst bestimmen wir den Definitionsbereich $D(f)\subseteq\mathbb{R}^2$. Für $(x,y)\neq(0,0)$ ist $x^2+y^2>0$ und somit ist $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ eine eindeutige, reelle Zahl. Für $(x,y)=(0,0)$ ist $f(x,y)$ nicht definiert. Also gilt $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Den Wertebereich $W(f)\subseteq\mathbb{R}$ bestimmen wir wie folgt. Es gilt $f(1,0)=0$ und für $a\neq 0$ ist $f(0,\frac{1}{a})=a$. Also bekommen wir jeden Wert in $\mathbb{R}$ als Bildpunkt von f, damit $W(f)=\mathbb{R}$.

(b) Für die Niveaulinien von f setzen wir $\frac{y}{x^2+y^2}=c$ mit einer Konstanten $c\in\mathbb{R}$, d.h. $(x^2+y^2)c=y$.
Im Fall $c=0$ ist die Niveaulinie die x-Achse ohne den Punkt $(0,0)$.
Im Fall $c\neq 0$ schreiben wir $x^2+y^2-\frac{y}{c}=0$, ergänzen quadratisch und erhalten

$$x^2+(y-\frac{1}{2c})^2=\frac{1}{4c^2},\quad \text{für } (x,y)\neq(0,0).$$

Das ist der Kreis mit Mittelpunkt $M(0, \frac{1}{2c})$ und Radius $r = \frac{1}{2|c|}$ ohne den Punkt $(0, 0)$.



(c) Gemäss Definition ist die lineare Ersatzfunktion (oder Tangentialebene) von f im Punkt (x_0, y_0) gegeben durch

$$L_f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

In unserem Fall

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

also

$$f_x(1, 1) = -\frac{1}{2}, \quad f_y(1, 1) = 0.$$

Die gesuchte Funktion hat also die Form

$$L_f(x, y) = 1 - \frac{x}{2}.$$

und hängt nicht von y ab.

(d) Wir berechnen das totale Differential von f zu

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = \frac{-2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}dx + \frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}dy$$

Wir teilen durch die absolute Grösse $z = f(x_0, y_0)$, um den relativen Fehler zu bekommen:

$$\begin{aligned} \left|\frac{df}{f}\right| &= \left|\frac{f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy}{f(x_0, y_0)}\right| \\ &\leq \frac{2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}\left|\frac{dx}{x_0}\right| + \frac{\left|x_0^2 - y_0^2\right|}{x_0^2 + y_0^2}\left|\frac{dy}{y_0}\right|. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Dreiecksungleichung benutzt. Setzen wir nun $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ein, so erhalten wir

$$\frac{df}{f}|_{(1,1)} \leq \frac{2}{2}\left|\frac{dx}{x_0}\right| + 0\left|\frac{dy}{y_0}\right| = \left|\frac{dx}{x_0}\right|.$$

Da wir x auf 1% genau messen, ist $\left|\frac{dx}{x_0}\right| = 1\%$, folglich wird auch z auf mindestens 1% genau gemessen.

Dies gilt jedoch nur, wenn wir nahe genug am Punkt $(1, 1)$ sind, in anderen Punkten kann die Linearisierung schlechter oder besser sein. Dass ein Messfehler in der y-Komponente keinen Einfluss auf den Messfehler von z hat, ist plausibel, denn schliesslich hängt die Linearisierung L_f ebenfalls nicht von y ab.

(e) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_{xx} = (f_x)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(6x^2-2y^2)y}{(x^2+y^2)^3}; \\ f_{xy} = (f_x)_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(6y^2-2x^2)x}{(x^2+y^2)^3}; \\ f_{yx} = (f_y)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(6y^2-2x^2)x}{(x^2+y^2)^3}; \\ f_{yy} = (f_y)_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(-6x^2+2y^2)y}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Wir sehen, $f_{xy} = f_{yx}$, was der Satz von Schwarz besagt.

10. Finden Sie die Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = \exp(3y^2 - 1 - x^2)$$

im Bereich

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 \leq 4\right\}.$$

Lösung: Für Extremalstellen im Innern des Gebiets B gilt grad $f(x, y) = (0, 0)$, also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\exp(3y^2-1-x^2)2x \\ \exp(3y^2-1-x^2)6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \text{ und } y = 0.$$

Für Punkte auf dem Rand wählt man eine Parameterdarstellung des Randes ∂B

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}$$

und erhält für die Funktion auf dem Rand

$$f|_{\partial B} = f\big(\vec{r}(t)\big) = \exp(3 \cdot 2\sin^2 t - 1 - 4\cos^2 t) = \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1).$$

(Beachte, dass der Rand eine Ellipse mit Halbachsen 1 und $1/\sqrt{2}$ ist). Um die Extremastellen auf dem Rand zu finden, schauen wir wo $\frac{d}{dt} f\big(\vec{r}(t)\big) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1) &= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)(6 \cdot 2\sin t\cos t - 4 \cdot 2\cos t(-\sin t)) \\ &= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)(20\sin t\cos t) \\ &= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)10\sin 2t = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2t \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\Leftrightarrow t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}, \end{aligned}$$

da $t \in [0, 2\pi)$.

Man erhält also folgende Kandidatenliste für die Extremalpunkte:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x, y)	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(-2, 0)$	$(0, -\sqrt{2})$
$f(x, y)$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^5}$	e^5	$\frac{1}{e^5}$	e^5

Das Minimum beträgt $\frac{1}{e^5}$ und wird auf dem Rand in den Punkten $(\pm 2, 0)$ angenommen. Das Maximum beträgt e^5 und wird auf dem Rand in den Punkten $(0, \pm\sqrt{2})$ angenommen.

11. Bestimmen Sie die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = xy(2x - 5y)$$

auf dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0), (0,2), (2,2), (2,0)$.

Lösung:

Wir betrachten $f(x,y) = 2x^2y - 5xy^2$ im Quadrat $[0,2] \times [0,2]$. Da die Funktion überall differenzierbar ist, sind die Randpunkte und die gemeinsamen Nullpunkte der Ableitungen nach x und y im Inneren des Definitionsbereiches (d.h. in $(0,2) \times (0,2)$) zu untersuchen.

- Im Inneren erhalten wir

  $$f_x(x,y) = 4xy - 5y^2 \quad \text{und } f_y(x,y) = 2x^2 - 10xy.$$

  Es gilt $f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow y(4x - 5y) = 0$, also entweder $y = 0$ oder $4x = 5y$.
  Es gilt $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow x(2x - 10y) = 0$, also entweder $x = 0$ oder $2x = 10y$.
  Da diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, erhalten wir $x = y = 0$. Aber $(0,0) \notin (0,2) \times (0,2)$. Deshalb sind keine Extremalstellen im Inneren.

- Auf dem Rand betracheten wir separat die Punkte im 'Inneren' des Randes und die Eckpunkte:
  - Wenn $(x,y) \in \{0\} \times (0,2)$, dann ist $f(0,y) = 0$ konstant. Daher sind alle Punkte in diesem Teil des Randes Kandidaten.
  - Wenn $(x,y) \in \{2\} \times (0,2)$, dann ist $f(2,y) = 8y - 10y^2$. Wir bestimmen die möglichen Extrema von $y \mapsto f(2,y)$ als Funktion einer Variablen. Nach Nullsetzen der Ableitung $8 - 20y$ dieser Funktion erhalten wir $y = \frac{2}{5}$ und damit als Kandidaten den Punkt $(2, \frac{2}{5})$ mit $f(2, \frac{2}{5}) = \frac{8}{5}$.
  - Wenn $(x,y) \in (0,2) \times \{0\}$, dann ist $f(x,0) = 0$ konstant. Daher sind alle Punkte in diesem Teil des Randes Kandidaten.
  - Wenn $(x,y) \in (0,2) \times \{2\}$, dann ist $f(x,2) = 4x^2 - 20x$. Wir bestimmen die möglichen Extrema von $x \mapsto f(x,2)$ als Funktion einer Variablen. Nach Nullsetzen der Ableitung $8x - 20$ dieser Funktion erhalten wir $x = \frac{5}{2}$ und damit als Kandidaten den Punkt $(\frac{5}{2}, 2)$, der nicht zum Definitionsbereich gehört. Daher liegt auf diesem Teil des Randes keine Extremalstelle.
  - Für die Eckpunkte haben wir $f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = 0$ und $f(2,2) = -24$.

  Wir vergleichen nun alle Kandidaten miteiander und finden:
  Das Maximum beträgt $\frac{8}{5}$ und wird im Punkt $(2, \frac{2}{5})$ angenommen.
  Das Minimum beträgt -24 und wird im Punkt $(2,2)$ angenommen.