D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 2

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Funktionen $(-1,1) \to \mathbb{R}$ sind strikt monoton wachsend?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

$\surd$ (d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

Auf $(-1,0]$ ist x^2 strikt monoton fallend und $|x| + x = 0$ konstant, also scheiden diese aus. Wegen $(\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0 = 0^3 - 0$ scheidet auch $x \mapsto x^3 - x$ aus. Die Funktion $x \mapsto \arccos x$ ist sowieso strikt monoton fallend. Nur die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist hier strikt monoton wachsend.

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^4-1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}, \\ a & \text{für } x \in \{-1,\ 1\}. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig an der Stelle 1?

(a) Für jedes a.

(b) $a = 1$

$\surd$ (c) $a = \frac{1}{4}$

(d) $a = 4$

(e) Ein solches a gibt es nicht.

Für die Stetigkeit muss $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = a$ gelten. Für $x \neq 1$ gilt

$$f(x) = \frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x^2)^2-1} = \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)},$$

und es folgt $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4}$. Die andere reelle Nullstelle des Nenner bei $x = -1$ brauchen wir nicht beachten, da wir bei der Limesbestimmung nur x in einer kleinen Umgebung von 1 betrachten.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x+1} & x > 1 \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist stetig.

Falsch. Die Funktion f ist nicht stetig in 1.

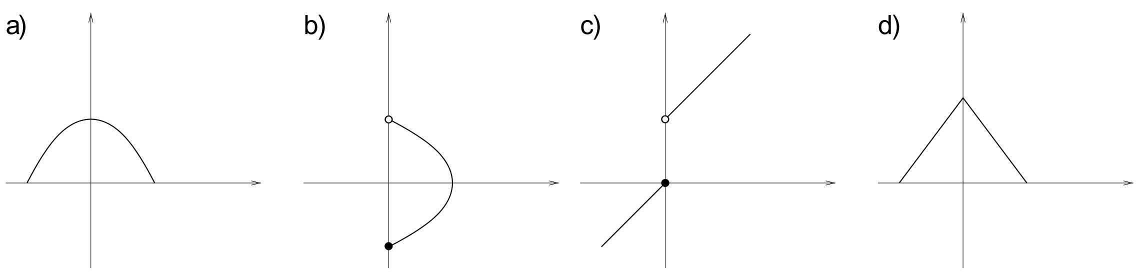
√ (b) f ist stetig in 0.

Richtig. Es gilt $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

(c) f ist stetig in 1.

Falsch. Es gilt $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

4. Welche der folgenden Bilder sind Graphen von Funktionen?



√ (a) Bild a).

(b) Bild b).

√ (c) Bild c).

√ (d) Bild d).

b) ist kein Graph, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate möglich sind. Für die anderen Teilmengen tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graph einer Funktion auf einem geeigneten Definitionsbereich. Die korrekte Antwort lautet daher (a), (c) und (d).

5. Welche Funktionen sind konstant?

$\checkmark$ (a) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Richtig. Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ per Betrachtung am Einheitskreis.

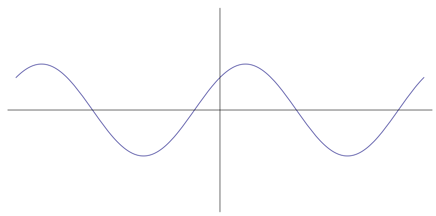
(b) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Nein. Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ per Betrachtung am Einheitskreis und somit

$$\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin(x).$$

(c) $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$.

Nein, der Funktionsgraph sieht so aus:



$\checkmark$ (d) $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

Richtig. Die Summe $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ ist konstant gleich 1.

Offene Aufgaben

6. (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(4x^2-2x+1\right)}{\lim_{x\to 0}(3x+2)}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

(c) Beachte $\sin(x)>0$ für alle $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$, deshalb gilt

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin(x)|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

(d) Beachte $\sin(x)<0$ für alle $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$, deshalb gilt

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin(x)|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin(x)}{x}=-1.$$

(e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\sin x\underset{x=y+\frac{\pi}{2}}{=}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin y}\cos y=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=1\cdot 1=1$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos(\pi/x)}\right)^2\sin(2\pi/x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\cos(\pi/x)}\right)^2\pi\cdot\frac{\sin(2\pi/x)}{2\pi/x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos(\pi x)}\right)^2\pi\cdot\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}=\pi\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos(\pi x)}\right)^2\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}\right)=\pi\cdot 1\cdot 1=\pi$$

7. (a) f_1. Die Funktion f_1 ist gerade und hat ein globales Maximum genau an dem Punkt an dem der Nenner am kleinsten ist. Es gilt $x^2\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und deshalb ist der minimale Wert des Nenners $1+x^2$ gleich 1. Die Funktion f_1 hat also ein globales Maximum beim Punkt $x=0$.

Weiter gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=0$. Mit anderen Worten die Funktion verschwindet im Unendlichen.

Zusätzlich gilt $f_1(x_1)>f_1(x_2)$ für alle $0\leq x_1\leq x_2$.

Diese Informationen unter Berücksichtigung von $f_1(1)=1/2$ und $f_1(2)=1/5$ genügen bereits für eine grobe Skizze.

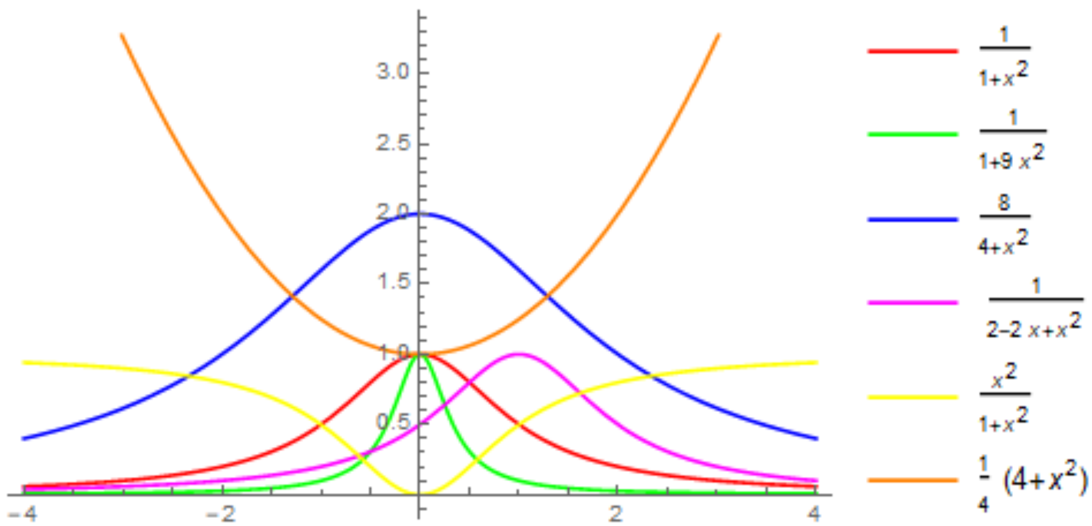
(b) f_2. Es gilt $f_2(x)=f_1(3x)$. Skalierung um einen Drittel in Richtung x-Achse.

(c) f_3. Es gilt $f_3(x)=2f_1(\frac{x}{2})$. Skalierung um zwei in Richtung x-Achse und Skalierung um zwei in Richtung y-Achse.

(d) f_4. Es gilt $f_4(x) = f_1(x-1)$. Translation des Graphen von f_1 um eine Einheit nach rechts.

(e) f_5. Es gilt $f_5(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - f_1(x)$. Spiegelung an x-Achse und anschliessende Verschiebung um eine Einheit nach oben.

(f) f_6. Es gilt $f_6(x) = \frac{1}{4}(x^2+4) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{f_1(\frac{x}{2})}$. Skalierung um zwei in Richtung x-Achse und anschliessende Inversion. Es ist eine Parabel mit Scheitelpunkt bei $(0,1)$.



8. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \text{ kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

Beschreiben Sie f durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f stetig? Gibt es ein x mit $f(x) = -\pi$? (Sie müssen x dazu nicht berechnen!)

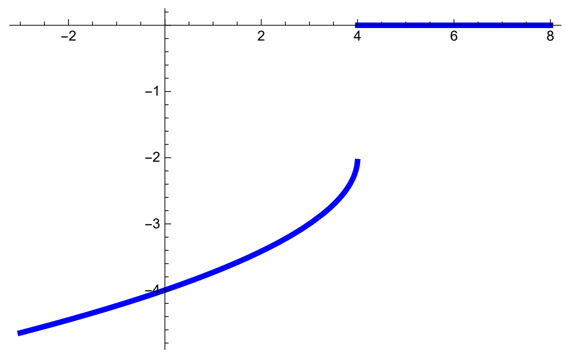
Lösung: Es gilt $p_x(y) = y(y^2 + 4y + x)$ und deshalb hat p_x die Nullstellen

$$y_0 = 0, \quad y_\pm = -2 \pm \sqrt{4-x},$$

wobei man $y_\pm$ mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen berechnet (auch bekannt als a-b-c oder p-q Formel). Weil $4 - x < 0$ für $x > 4$ ist $y_\pm$ keine reelle Nullstelle von p_x für $x > 4$. Weiterhin ist $y_- \le y_+ \le y_0$ falls $x \le 4$. Fügt man diese beiden Erkentnisse zusammen erhält man, dass die kleinste Nullstelle von p_x gegeben ist durch

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{4-x} & x \le 4 \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

Die Funktion f ist somit nicht stetig bei $x = 4$. In der Tat $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -2$.



Wir wollen noch zeigen, dass es ein x mit $f(x) = -\pi$ gibt. Es gilt

$$f(0) = -4 \leq -\pi \quad \text{und} \quad f(3) = -3 \geq -\pi.$$

Da f auf $(-\infty, 4)$ stetig ist, impliziert der Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [0,3]$ mit $f(x) = -\pi$ existiert.

9. Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2+y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x-Achse mit derselben x-Koordinate wie A. Es bezeichne ABC des Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A, wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

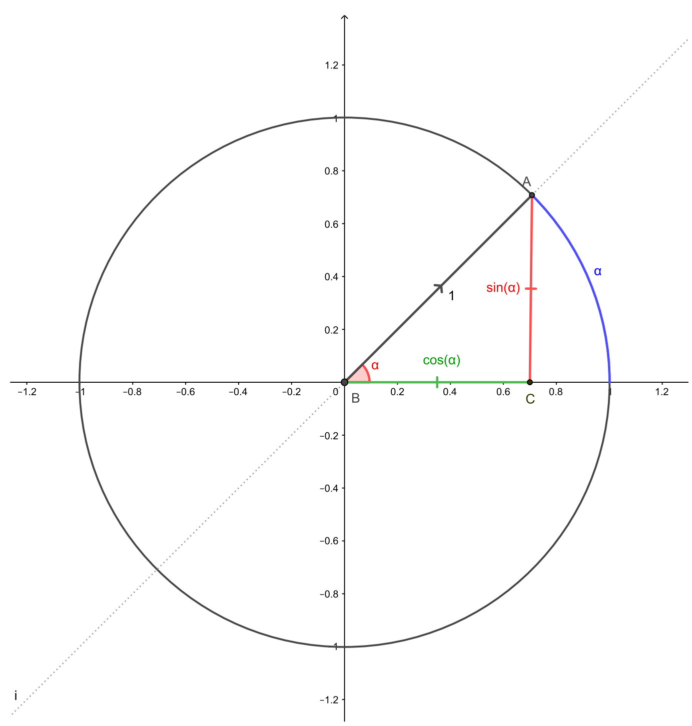
(a) Skizzieren Sie das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechne die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

Lösung: Das Dreieck ABC ist ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit Hypothenuse $\overline{AB}$. Dies folgt, weil die Strecke AB auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. Nach Pythagoras gilt

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2.$$

Folglich $1 = 2\overline{AC}^2$ und deshalb $\overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Deshalb $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Skizze:



(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Folgeren Sie daraus

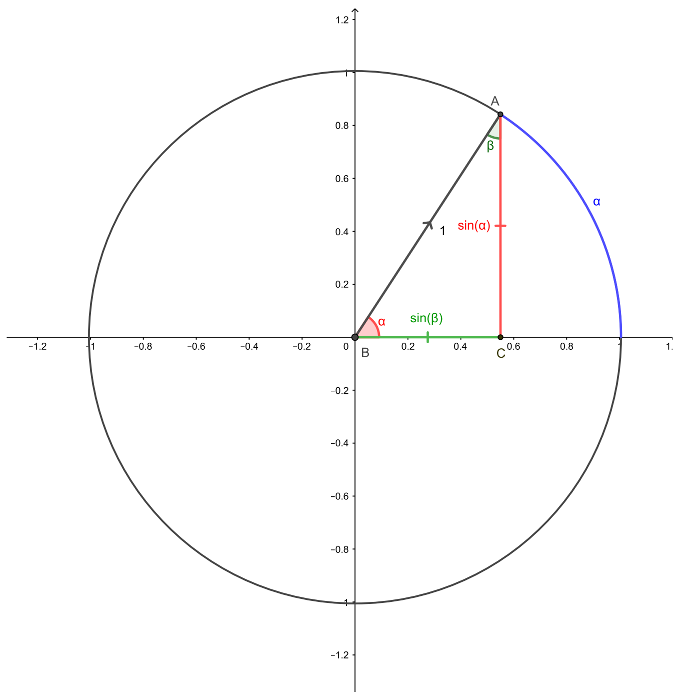
$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (*Bemerkung*: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen *sin* und *cos* in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

Lösung: Weil $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, folgt dass der Winkel $\measuredangle ABC = \alpha$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt B ist gleich α). Weil die Innenwinkelsumme im Dreieck π beträgt, lässt sich folgende Rechnung durchführen

$$\pi = \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \alpha + \frac{\pi}{2} + \measuredangle CAB,$$

also $\measuredangle CAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Wir setzen $\beta = \measuredangle CAB$. Man entnimmt der untenstehenden Figur, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\beta) = \cos(\alpha)$, wie gewünscht.



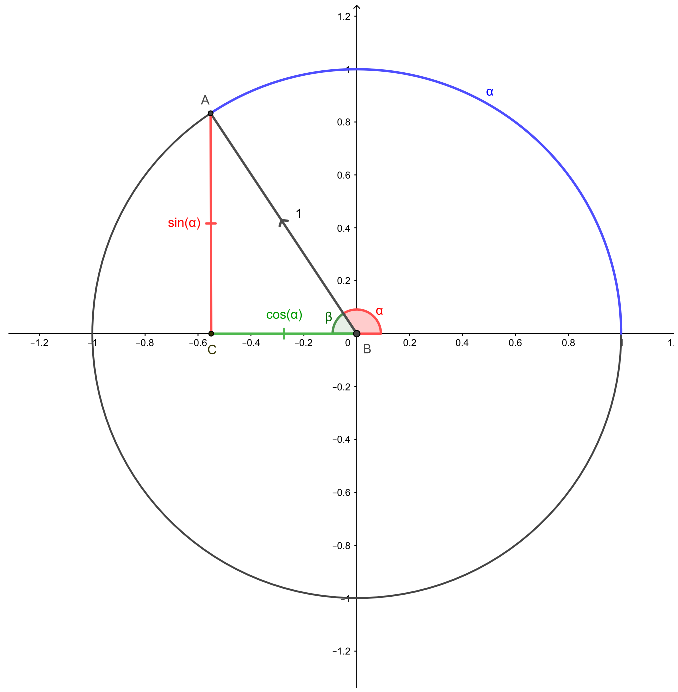
Des Weiteren gilt $\sin(x) = -\sin(-x)$, also $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$, was noch zu zeigen war.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (*Bemerkung*: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

Lösung: Weil $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, folgt dass der Winkel $\measuredangle ABC = \pi - \alpha$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt B ist gleich $\pi - \alpha$). Setze $\beta = \measuredangle ABC$. Wie man dem untenstehenden Bild entnehmen kann, gilt $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\beta) = |\cos(\alpha)|$. Weil $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ folgt weiterhin $\cos(\alpha) \leq 0$, siehe ebenfalls das untenstehende Bild. Somit gilt $|\cos(\alpha)| = -\cos(\alpha)$ und deshalb $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$, was zu zeigen war.



(d) Es sei arctan die Umkehrfunktion von tan. Zeigen Sie die Beziehung

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC. (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).

Lösung: Es sei $A := (0,0), C := (1,0), B := (1,x)$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit Hypotenuse $\overline{AB}$. Weiter gilt $\overline{AC} = 1$ und $\overline{CB} = x$. Es sei $\alpha := \measuredangle BAC$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt A ist gleich α). Nach Konstruktion gilt

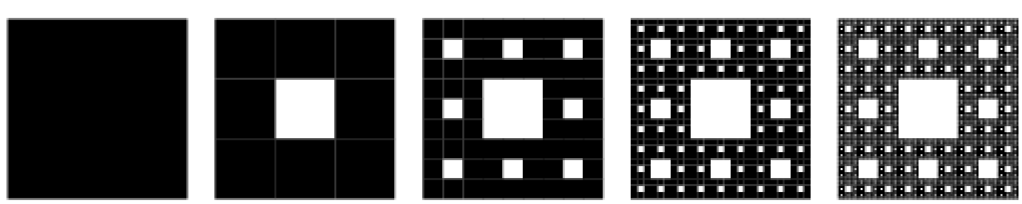
$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{1} = x.$$

Folglich, weil $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\arctan(x) = \alpha$. Wir berechnen

$$\sin(\arctan(x)) = \sin(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

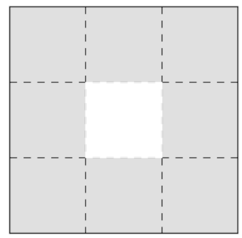
wobei die Strecke $\overline{AB}$ mittels Pythagoras ausgerechnet wurde.

10. Zusatzaufgabe zum Thema Folgen: Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 werden sukzessive kleinere Quadrate ausgeschnitten, wie unten abgebildet. Die Seitenlängen der im Folgeschritt ausgeschnittenen Quadrate beträgt stets ein Drittel der vorhergehenden Seitenlänge. Wie gross ist der Flächeninhalt des im Grenzwert entstehenden Fraktals?



Diese Konstruktion führt zum sogenannten Menger-Schwamm, der weitere faszinierende Eigenschaften hat: https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm.

Lösung: Es bezeichne a_n den Flächeninhalt der Figur nach dem n-ten Ausschneiden. a_0 bezeichne den ursprünglichen Flächeninhalt, d.h. $a_0 = 1$. Im ersten Schritt wird das Quadrat in 3×3 gleich grosse Kacheln zerlegt und die mittlere Kachel wird entfernt.



Da nun noch 8 der 9 Kacheln vorhanden sind ist der Flächeninhalt der so entstandenen Figur $a_1 = \frac{8}{9} \cdot a_0 = \frac{8}{9}$.

Das Fraktal entsteht nun, indem man jede der im vorigen Schritt entstandenen Kacheln wieder in 3×3 gleich grosse Kacheln aufteilt und jeweils die mittlere entfernt. Dabei reduziert sich der Flächeninhalt jeder Kachel wiederum um $\frac{8}{9}$. Weil die gesamte Figur jedoch aus all diesen Kacheln besteht, gilt dies auch für den ganzen Flächeninhalt und man erhält die folgende rekursive Formel

$$a_{n+1} = \frac{8}{9} \cdot a_n, \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

d.h.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{8}{9} \cdot a_0 = \frac{8}{9}, \\ a_2 &= \frac{8}{9} \cdot a_1 = \left(\frac{8}{9}\right)^2, \\ a_3 &= \frac{8}{9} \cdot a_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man erkennt nun leicht, dass aufgrund der rekursiven Formel ebenfalls die explizite Darstellung

$$a_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n, \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

gilt.

Damit ist die Folge (a_n) in der Form $(a_n) = q^n$ mit $q = \frac{8}{9} < 1$ und ist deshalb eine Nullfolge. Im Limes hat das entstehende Fraktal also keinen Flächeninhalt mehr!