D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 3

MC-Aufgaben

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus ln zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

√ (e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

Die Funktion ist im Definitionsbereich $[0,\infty)$ streng monoton wachsend, also injektiv. Des Weiteren ist sie surjektiv, also umkehrbar. Sei $y = \ln(x^2+1)$. Lösen wir nach x auf, so erhalten wir $x = \sqrt{e^y - 1}$. Vertauschen von x und y führt schließlich zu $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0,1]$.

√ (c) Die Funktion $g : \big[0, \sqrt{1/2}\big] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \big[0, \sqrt{1/2}\big],\ x \mapsto f(x)$.

Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0,1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos(\sqrt{\arccos x}^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ unter f gleich $[0, 1/\sqrt{2}]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gelte ausserdem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Welche Aussage ist richtig?

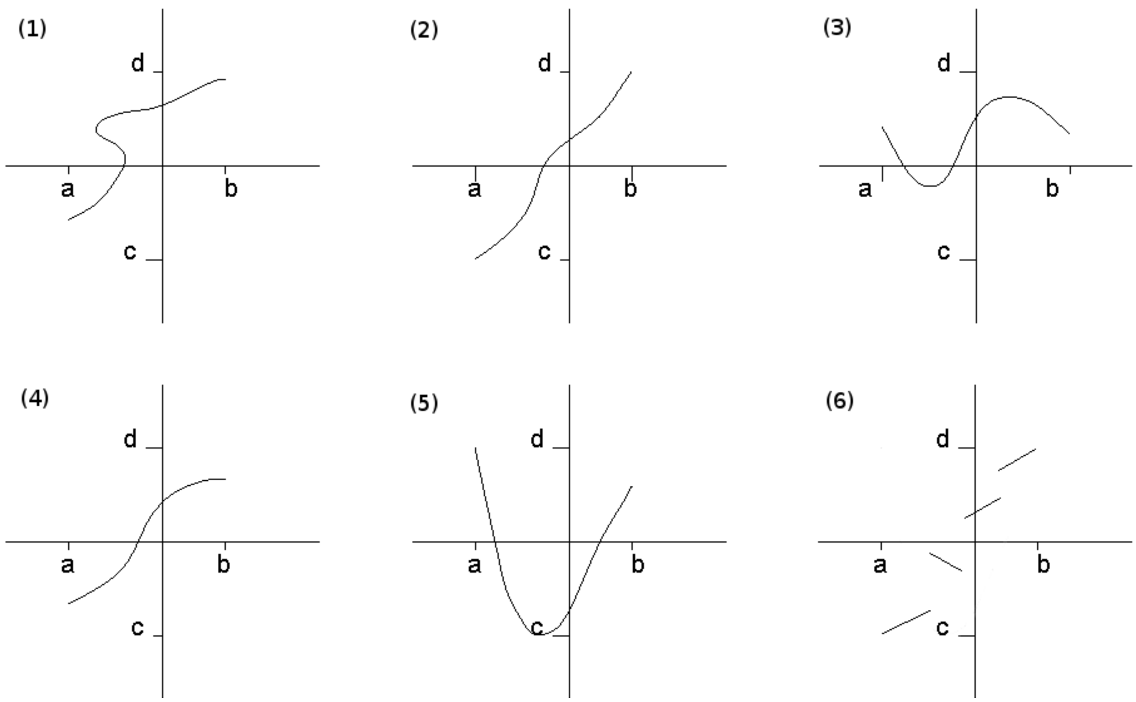
(a) Dann ist g sicher eine Asymptote von f wenn $x \to +\infty$.

√ (b) g kann eine Asymptote von f sein wenn $x \to +\infty$, muss aber nicht.

(c) Dann ist g sicher keine Asymptote von f wenn $x \to +\infty$.

Mit $f(x) = g(x) = x2 + 1$ erfüllen die beiden Funktionen alle Bedingungen und sind Asymptoten von einander, d.h. die dritte Aussage ist sicher falsch. Wenn wir hingegen $g(x) = x^2 + 2$ setzen und $f(x) = x^2 + 1$ lassen, strebt weiterhin $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ wenn $x \to +\infty$, aber $f(x) - g(x) \to -1$, d.h. g ist keine Asymptote von f. Also ist auch die erste Aussage falsch: Nicht jedes solche g ist eine Asymptote von f. Die zweite Aussage ist richtig: g kann eine Asympote von f sein, aber das muss nicht zwingend gelten.

4. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

$\checkmark$ (b) (2)

(c) (3)

$\checkmark$ (d) (4)

(e) (5)

$\checkmark$ (f) (6)

(1) ist kein Graph einer Funktion, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate möglich sind. In (3) und (5) sind verschiedene x-Koordinaten mit derselben y-Koordinate möglich; in diesen Fällen ist die Funktion also nicht injektiv. Für (2), (4) und (6) tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graphen zweier injektiver Funktionen auf einem geeigneten Definitionsintervall.

5. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

√ (c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

Es gilt

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} = e^x - 1 + 2/(e^x + 1).$$

Terme, die hier für $x \to \infty$ nicht gegen Null konvergieren, sind Terme, die in der Funktion g vorkommen. Also $g(x) = e^x - 1$.

6. Es sei $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^3+1}$. Welche Aussage ist richtig?

(a) $f'(x) = \frac{-36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

√ (b) $f'(x) = \frac{9x^2}{(1+2x^3)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^4}$

(d) $f'(x) = \frac{72x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

Offene Aufgaben

7. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} &f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto 2x-6 \\ &f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), && x \mapsto |x| \\ &f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \min\{x^2-9, 0\} \\ &f_4\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \tfrac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

(a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5,5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h: \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1}: W(f_4) \to \mathbb{R}\setminus\{3\}$.
Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ hierzu nicht explizit berechnen.

Lösung:

(a) Eine Funktion f ist injektiv falls

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- f_1 ist bijektiv:

$$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \qquad f_1 \text{ ist injektiv}$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wähle } x = \frac{y+6}{2} \;\Rightarrow\; f_1(x) = y \qquad f_1 \text{ ist surjektiv}$$

- f_2 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ ist } f_2(x_1) = f_2(x_2) \qquad f_2 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$y \in [0,\infty) \text{ beliebig, wähle z.B. } x = -y \;\Rightarrow\; f_2(x) = y \qquad f_2 \text{ ist surjektiv}$$

- f_3 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -5, x_2 = 8 \text{ ist } f_3(x_1) = f_3(x_2) \qquad f_3 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$\text{(z.B.) für } y = 2 \text{ gibt es kein } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f_3(x) = y \qquad f_3 \text{ ist nicht surjektiv}$$

- Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$f_4(x) = \frac{x+1}{2x-6} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{(x-3)+4}{x-3} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{x-3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}.$$

  Damit erkennt man leichter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{x_1-3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2-3} \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{x_1-3} = \frac{2}{x_2-3} \\ &\Rightarrow \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f_4 \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x-3} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \text{ so dass } \frac{1}{2} \notin W(f_4) \qquad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

  Somit ist f_4 nicht bijektiv.

(b) Siehe Abbildungen 1 und 2.

Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h, indem man den Teil des Graphen von g, welcher unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse spiegelt.

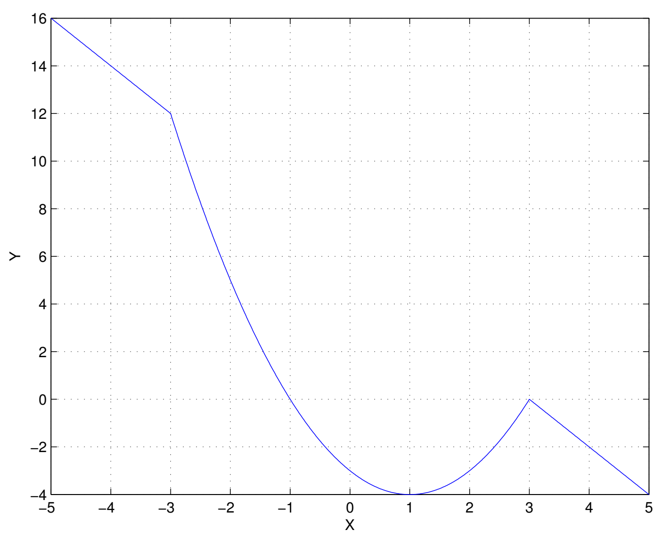


Abbildung 1: Aufgabe 7. b) Funktion g

(c) Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-6} \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 2xy - 6y \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = 2xy - x \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = x(2y-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

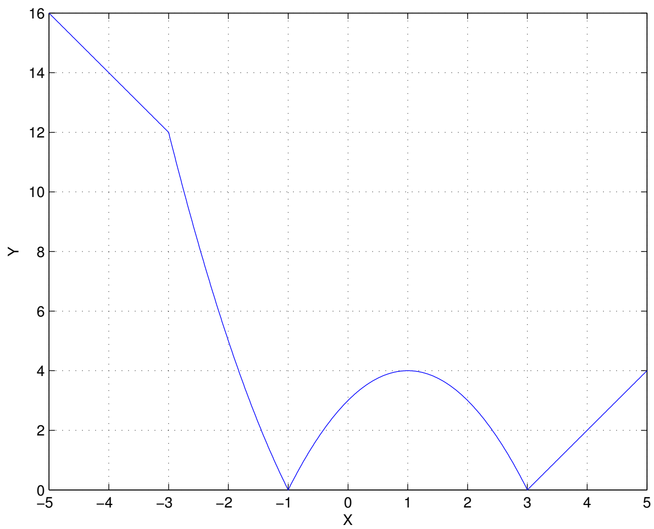


Abbildung 2: Aufgabe 7. b) Funktion h

8. (a) Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D(f) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Bestimmen Sie die inverse Funktion von f.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan\bigl(\pi\bigl(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x)\bigr)\bigr) = a.$$

Lösung:

(a) Wir nutzen zunächst aus, dass die Funktion tan π-periodisch ist. Daher ist $f(x) = \tan(x) = \tan(x - \pi)$ für alle x. Wegen $x \in D(f) = \bigl(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\bigr)$ ist dann $x' := x - \pi \in \bigl(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\bigr)$. Also ist

$$\arctan(f(x)) = \arctan(\tan(x - \pi)) = \arctan(\tan(x')) = x' = x - \pi.$$

Schreiben wir $y = f(x)$, so liefert Auflösen der obigen Gleichung nach x, dass $y \mapsto g(y) := \arctan(y) + \pi$ die gesuchte Inverse ist. Da $f : D(f) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist (d. h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in D(f)$ mit $f(x) = y$) kann als Definitionsbereich von g ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden: $D(g) = \mathbb{R}$.

(b) Wegen $\cos(x) \in [-1, 1]$ liegt das Argument des Tangens $\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))$ in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Da aber der Tangens weder für $\frac{\pi}{2}$ noch für $\frac{3\pi}{2}$ definiert ist, muss auf jeden Fall zunächst $\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ gelten, also $\cos(x) \in (-1, 1)$. Wir erkennen in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ den Definitionsbereich $D(f)$ von f wieder, also den Wertebereich der inversen Funktion g. Aus

$$\tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = f(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = g^{-1}(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)))$$

folgt dann, dass

$$g^{-1}(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = a = g^{-1}(g(a))$$

ist. Da g injektiv ist, schließen wir daraus

$$\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)) = g(a) = \arctan(a) + \pi,$$

also

$$\cos(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(a).$$

Somit sind alle Lösungen von der Form

$$x = \pm\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(a)\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Alternativer Lösungweg: Wegen der π-Periodizität der tan-Funktion ist

$$a = \tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = \tan(\frac{\pi}{2}\cos(x)).$$

Das Argument $\frac{\pi}{2}\cos(x)$ des Tangens liegt nun in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und wir können direkt die Umkehrfunktion arctan anwenden.

Ein weiterer, aber **falscher** *Lösungsweg:* Wir wenden die Funktion arctan direkt auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\arctan(a) = \arctan(\tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)))) = \pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)),$$

was offensichtlich nicht mit obigem Resultat übereinstimmt. Der Fehler liegt darin, dass im allgemeinen *nicht*

$$\arctan(\tan(z)) = z$$

gilt. Gleichheit besteht nämlich nur für $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da der Wertebereich von arctan per Definition $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist.

Fazit: Muss eine nicht injektive Funktion (wie hier der tan) erst auf einen kleineren Definitionsbereich eingeschränkt werden, damit sie umkehrbar ist, so ist bei der Anwendung der Umkehrfunktion Vorsicht geboten! Das gleiche Problem tritt übrigens auch bei den Funktionen arcsin und arccos auf.

9. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

(a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

(b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

(c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

(d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

Lösung:

(a) Da

$$\frac{t}{t + \sqrt{t}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{t} + 1} \to 0$$

für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 1$.

(b) Da

$$\sqrt{4t^2 + 3} - 2t = \frac{3}{\sqrt{4t^2 + 3} + 2t} \to 0$$

für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 2t$.

(c) Da $\cos(1/t) \to \cos(0) = 1$ für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 3t + 1$.

(d) Da

$$\log(1 + e^t) - t = \log(1 + e^t) - \log(e^t) = \log(1 + e^{-t}) \to \log(1) = 0$$

für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto t$.

10. Berechnen Sie $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$;

c) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sin x}$;

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$;

e) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\tan x)^2$;

f) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\ln x}$;

g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$;

h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h)** im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist.

Lösung:

a) $\frac{d}{dx}(x\sin x) = \sin x + x\cos x$ (Produktregel)

b) $\frac{d}{dx}\left((x^2+3)^{-1}\right) = (-1)(x^2+3)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$ (Kettenregel)

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (Kettenregel oder Quotientenregel)

d) $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

e) $\frac{d}{dx}\left((\tan x)^2\right) = 2(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ (Kettenregel, Abl. von $\tan x$)

f) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ (Kettenregel und Ableitung von $\ln x$)

g) Es sei $x \neq 0$. Es gilt $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ (Kettenregel).
Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}},$$

weil

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

wobei wir die Substitution $x = \frac{1}{h}$ gemacht haben, gilt $f'(0) = 0$ (weil der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen).

h) Es sei $x \neq 0$. Wir berechnen
$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (Kettenregel und Produktregel).
Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Weil $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h| \cdot 1 = |h|$$

und deshalb lässt sich zeigen, dass

$$\left|\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| = \lim_{h\to 0}\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Wir haben also gezeigt $|f'(0)| \leq 0$ und somit gilt $f'(0) = 0$. Fasst man alles zusammen erhält man:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im folgenden zeigen wir, dass die Funktion f' im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht. Um dass zu zeigen muss man zwei Folgen (a_n), (b_n) finden so dass $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ mit $n \to +\infty$ und

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

In der Tat, es sei (a_n) die Folge gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n2\pi}$$

und es sei (b_n) die Folge gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}.$$

Beachte, dass $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ falls $n \to +\infty$. Wir berechnen

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos(n2\pi) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0;$$

der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert also nicht und die Funktion f' ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.