D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 4

MC-Aufgaben

1. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x = 6$?

(a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

√ (b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(d) $y = x - 4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

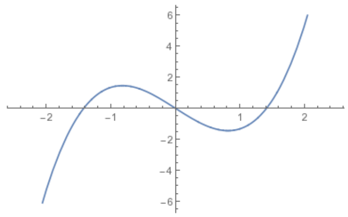
Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y = ax + b$ gegeben, wobei $a = f'(6)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(6, f(6))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

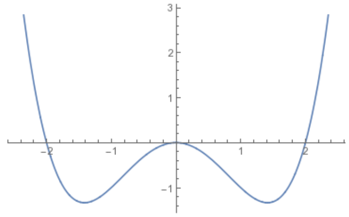
und damit $a = f'(6) = \frac{1}{4}$. Aus $(6, f(6)) = (6, 2)$ folgt, dass b die Gleichung $2 = \frac{6}{4} + b$ erfüllt, dass also $b = \frac{1}{2}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

2. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen

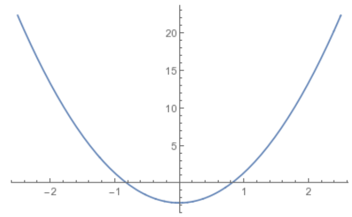
$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f' = g$

Falsch. Wenn $f' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von f in 0 verschwinden, da g dort eine Nullstelle hat. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

√ (b) $g' = f$

Richtig! f hat drei Nullstellen $x_0 < x_1 < x_2$ und an diesen veschwindet offenbar die Ableitung von g. Ausserdem ist g auf $(-\infty, x_0)$ monoton fallend, auf (x_0, x_1) monoton steigend, auf (x_1, x_2) monoton fallend und auf (x_2, ∞) monoton steigend. Auch das passt zu dem Verhalten von f, welche negativ auf $(-\infty, x_0)$ ist, positiv auf (x_0, x_1) ist, negativ auf (x_1, x_2) ist und positiv auf (x_2, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

√ (c) $f' = h$

Richtig! h hat zwei Nullstellen $x_0 < x_1$ und an diesen verschwindet offenbar die Ableitung von f. Ausserdem ist f monoton steigend auf $(-\infty, x_0)$, monoton fallend auf (x_0, x_1) und monoton steigend auf (x_1, ∞). Auch das passt zum Verhalten von h, welche positiv auf $(-\infty, x_0)$ ist, negativ auf (x_0, x_1) ist und postiv auf (x_1, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

(d) $h' = g$

Falsch. Wenn $h' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von h in 2 verschwinden, da g dort eine Nullstelle besitzt. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Falls ist.

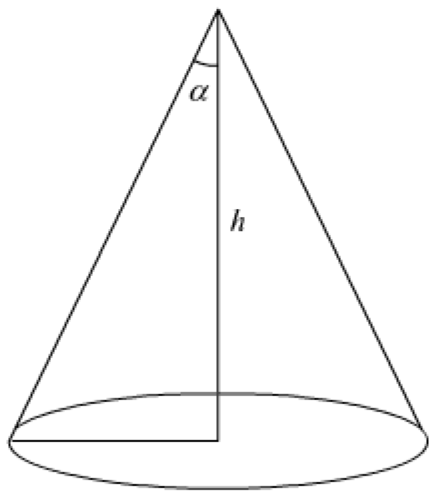
√ (e) $g'' = h$

Richtig! Das folgt aus $g' = f$ und $f' = h$.

(f) $f'' = g$

Falsch. Wenn $f'' = g$ wäre, dann müsste g für alle $x < 0$ negativ sein; stellt man sich nämlich vor, man würde auf dem Graphen von f mit dem Auto entlang fahren, dann lenkt man bis zum Punkt $(0, 0)$ nach rechts, d.h. $f''(x) < 0$ für alle $x < 0$. Jedoch ist g negativ auf dem Intervall $(-2, 0)$.

3. In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei Berechnung des Volumens $V(\alpha)$ des Kegels aus?



(a) Der absolute Fehler $V(\alpha+\Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\tan(\alpha)\Delta\alpha$.

√ (b) Der absolute Fehler $V(\alpha+\Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha$.

(c) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ hängt von h ab.

√ (d) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ ist proportional zu $\frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

Lösung: Die Gleichung für das Volumen eines geraden Kegels lautet wie folgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot h.$$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $\tan(\alpha)h$ und hat somit Flächeninhalt $\pi(\tan(\alpha)h)^2$. Deshalb gilt

$$V = V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3.$$

Wir berechnen mittels der Kettenregel

$$V'(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\tan(\alpha)' = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$V(\alpha+\Delta\alpha) \approx V'(\alpha)\Delta\alpha + V(\alpha),$$

also gilt für den absoluten Fehler

$$V(\alpha+\Delta\alpha) - V(\alpha) \approx \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha.$$

Für den relativen Fehler gilt

$$\frac{V(\alpha+\Delta\alpha) - V(\alpha)}{V(\alpha)} \approx \frac{\frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha}{\frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3} = \frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\Delta\alpha = \frac{4}{\sin(2\alpha)}\Delta\alpha.$$

4. Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

√ (c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x \ln x$.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = \left(\frac{x}{x} + \ln x\right) e^{x \ln x} = (1 + \ln x)x^x.$$

5. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *richtig*?

√ (a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

√ (b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

√ (c) Ist $f' > 0$ auf (a,b), so ist f streng monoton wachsend.

(d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a,b).

Die Aussage (a) folgt aus der Definition der Ableitung. Die Aussagen (b) und (c) folgen aus dem Mittelwertsatz. Aber (d) ist falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf (a,b), aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Beispiel: $f(x) = -x^3$.

6. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es seien $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

(a) f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(b) f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

$\surd$ (c) f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(d) f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a,b]$.

Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ ist auch f' identisch gleich 0; also sind (a) und (b) falsch. Ein Beispiel wie $f(x) = x^3 - 3x$ mit $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann. Also ist (c) die einzig richtige Antwort.

Offene Aufgaben

7. Beweisen Sie die folgende Formeln per Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \geq 1$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \geq 1$.

Lösung:

(a) **Induktionsanfang**: $n = 1$. Die Formel ist trivial

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$. Wir nehmen an, dass die Formel für n gilt.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= (n+1)(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die Induktionsvoraussetzung benutzt.

(b) **Induktionsanfang**: $n = 1$. Die Formel ist trivial

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1.$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$. Wir nehmen an, dass die Formel für n gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1 \\
&= ((n+1)+1)! - 1.
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Induktionsvoraussetzung benutzt.

8. Es sei x eine kleine Grösse. Finden Sie *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1$

(b) $f_2(x) = e^{1+x}$

(c) $f_3(x) = (1000 - x)^{\frac{1}{3}}$

(d) $f_4(x) = \prod_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365}\right)$.

Lösung: Die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0 is gegeben durch $x \mapsto xf'(0) + f(0)$. Wir müssen also in jeder Teilaufgabe den Term $f'(0)$ und den Term $f(0)$ berechnen.

(a) Wir berechnen

$$\left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1\right)' = -\frac{2}{(x+1)^3},$$

und deshalb gilt

$$\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \approx -2x.$$

(b) Beachte

$$\left(e^{1+x}\right)' = e^{1+x}$$

und deshalb

$$e^{1+x} \approx ex + e.$$

(c) Weil

$$\left((1000 - x)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3(1000 - x)^{2/3}}$$

erhalten wir

$$(1000 - x)^{\frac{1}{3}} \approx -\frac{x}{300} + 10.$$

(d) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten mit der verallgemeinerten Produktregel lösen. Die verallgemeinerte Produktregel lauetet wie folgt:

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_{i-1} u_i' u_{i+1} \cdots u_n.$$

Falls also z.B. $n = 3$, dann gilt

$$(u_1 u_2 u_3)' = u_1' u_2 u_3 + u_1 u_2' u_3 + u_1 u_2 u_3'.$$

Wir berechnen also

$$\left(\prod_{k=0}^{364}\left(1-\frac{kx}{365}\right)\right)' = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1-\frac{\ell x}{365}\right).$$

Wenn wir $x = 0$ setzen dann erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1-\frac{\ell\cdot 0}{365}\right) = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364} 1 = -\frac{1}{365}\sum_{k=0}^{364} k.$$

Die Gauss'sche Summenformel (welche in der Schnellübung 1, Aufgabe 2 hergeleitet wurde) sagt uns

$$\sum_{k=0}^{364} k = \frac{365\cdot 364}{2}.$$

Wenn man alles zusammenfasst, erhält man folgende Näherung

$$\prod_{k=0}^{364}\left(1-\frac{kx}{365}\right) \approx -182x+1.$$

9. Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues, unbekanntes Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach 10 Sekunden mit einem Messfehler von ¡ 0.1 Sekunden, also

$$m(10+\Delta t) = 1, \qquad |\Delta t| < 0.1$$

(a) Bestimmen Sie den relativen Messfehler der Zeitmessung: $\frac{\Delta t}{t}$.

(b) Bestimmen Sie α unter der Annahme einer perfekten Zeitmessung, d.h. $\Delta t = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t^2}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass der relative Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

(e) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

Lösung:

(a) $\frac{\Delta t}{t} < \frac{0.1}{10} = 1\%$.

(b) Falls $\Delta t = 0$, haben wir $1 = m(10) = 1024e^{-10\alpha}$. Wir lösen nach α:

$$\frac{1}{1024} = e^{-10\alpha} \Leftrightarrow -10\alpha = \ln(\frac{1}{1024}) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{10}\ln(2^{10}) = \ln(2).$$

(c) Wir finden zuerst eine Formel für $\alpha(t)$, wobei t die Zeit ist, für die $m(t) = 1$. Also $\alpha(t)$ ist die Zahl, die die Gleichung $1 = m_0 e^{-\alpha(t)\cdot t}$ löst.
Analog wie in Teilaufgabe **b)** erhalten wir $\alpha(t) = \ln(m_0)\frac{1}{t}$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t) &= \ln(m_0)\frac{1}{t+\Delta t} - \ln(m_0)\frac{1}{t}\\ &= -\ln(m_0)\frac{\Delta t}{t(t+\Delta t)}.\end{aligned}$$

Da $t + \Delta t \approx t$, folgen die beide Proportionen.

(d) Aus Teilaufgabe **c)** haben wir $\Delta\alpha = -\alpha\frac{\Delta t}{t+\Delta t}$. Nochmals mit $t + \Delta t \approx t$ erhalten wir

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -\frac{\Delta t}{t}.$$

(e) Durch die lineare Ersatzfunktion erhalten wir

$$d\alpha = \alpha' dt = -\alpha\frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dt}{t}.$$

So die Ausdrücke sind gleich, wenn man $dt = \Delta t$ und $t + \Delta t \approx t$ annimmt. Der relative Messfehler in der Zeitmessung schlägt sich linear im relativen Messfehler der Zerfallsrate nieder.

10. (a) Es sei eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

(b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

(c) Wenn die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.

Lösung:

(a) Wenn f konstant ist, dann ist natürlich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,\, b)$. Für die umgekehrte Implikation nehme man $x_1,\, x_2 \in [a,\, b]$, wobei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Die Einschränkung $f|_{(x_1,x_2)}$ ist differenzierbar. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

ist, aber laut unserer Annahme ist $f'(\xi) = 0$ und deshalb ist $f(x_1) = f(x_2)$. Dies heisst, dass f konstant ist.

(b) Man definiere

$$f:\ x \longmapsto \arcsin x + \arccos x,$$

mit $D(f) = [-1, 1]$. Die Funktion f ist stetig und in $(-1,\, 1)$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Teilaufgabe (a) zeigt, dass f konstant ist. Somit ist für alle $x \in [-1, 1]$ z.B.

$$\arcsin x + \arccos x = f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Wir wählen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & x \leq c, \\ b - x, & x > c, \end{cases}$$

wobei $c := \frac{a+b}{2}$ den Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$ bezeichnet. Diese Funktion ist auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetig und lediglich an der Stelle c nicht differenzierbar, da

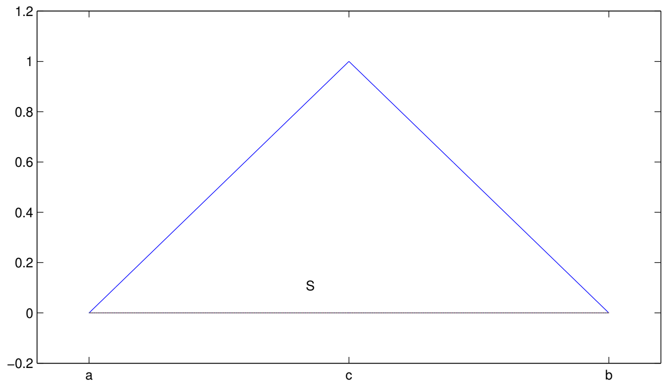


Abbildung 1: Die Funktion aus Aufgabe 5(c) (blau) und die zugehörige Sekante (schwarz).

sie dort einen Knick hat. Links vom Knick beträgt die Ableitung $+1$, rechts davon -1. Die Sekantensteigung lautet aber

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{0-0}{b-a} = 0 \neq \pm 1$$

und deshalb gilt der Mittelwertsatz nicht. Eine Skizze der Funktion und der Sekante ist auf dieser Seite am oberen Ende.