D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 5

Abgabetermin Mittwoch, 28.10.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

√ (d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 (oder beide gegen ∞, s. später in der Vorlesung) streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2 = 0$ und $x^2-3x+2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

2. Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

√ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$

$$= 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \ \text{ und } \ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

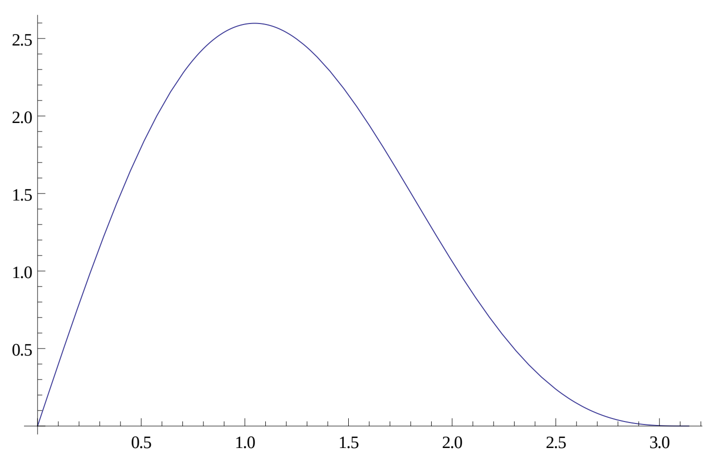
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0,\pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\ f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



3. Sei

$$\begin{aligned} f\colon [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

√ (a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

√ (c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

√ (d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \ \text{ für } \ x \in (0,1) \\ f'(x) &< 0 \ \text{ für } \ x \in (1,4) \\ f'(x) &> 0 \ \text{ für } \ x \in (4,6), \end{aligned}$$

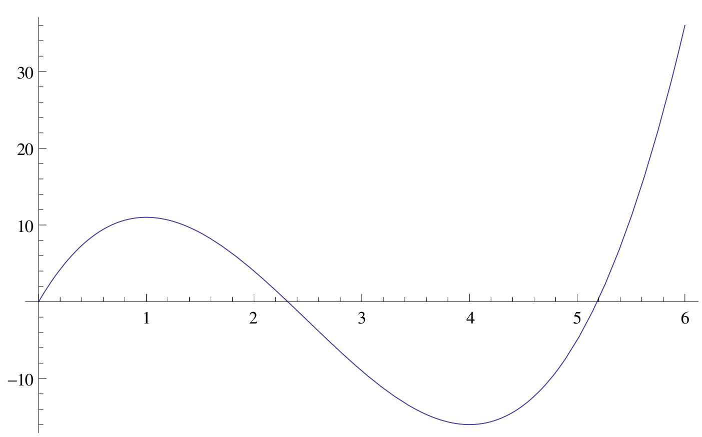
ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

$$f(0) = 0, \ f(1) = 11, \ f(4) = -16, \ f(6) = 36.$$

Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;
- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



4. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

√ (a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

√ (c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

√ (d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

Die richtigen Antworten sind (a), (c) und (d).

Für (a) betrachte man, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $y > 0$ ist $e^y > \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$. Insbesondere, für alle $x > 0$ haben wir auch $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{(n+1)!\cdot x^{n+1}}$ (Setze $y = \frac{1}{x}$). Daraus folgt,

$$\frac{e^{-1/x}}{x^n} < (n+1)! \cdot x, \quad \text{für } x > 0.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich, dass $0 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} \leq (n+1)! \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

Für (c), mit dem Variablentransformation $x \mapsto \frac{1}{x}$ wird die Aussage äquivalent zu $x^n = o(e^x)$ für $x \to \infty$. Dies wurde in der Vorlesung bewiesen.

Für (d) gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{\ln x}-(1/3)\ln(x)} = 0$, da $\sqrt{\ln(x)} = o(\ln(x))$ für $x \to \infty$.

(b) ist falsch, denn es gilt $e^{1/x} > \frac{1}{n!\cdot x^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$. Somit ist, wenn er existiert,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^{-n}} \geq \frac{1}{n!}.$$

(e) ist falsch, denn $\frac{\sin^2(x)\ln^3(x)}{\ln^3(x)} = \sin^2(x)$ und folglich konvergiert der Bruch nicht.

Offene Aufgaben

5. Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan\frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-4x}-1}{2x^2-8x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4)-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x\ln^2(x)}$

Lösung:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\tan x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x+\sin x}{1+\tan^2 x} = 1$$

(b) Man bemerke zunächst, dass $\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t^2} = 1$. Somit haben wir also

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\frac{1-x}{1+x}}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\arctan\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{1+x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x\cos x-\sin x} &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x)+\sin x\right)}{\cos x - x\sin x-\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)}{x}\\
&\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} -2\left(\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\sin x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{6\sin x}{\cos^4 x}\right)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2-4x}-1}{2x^2-8x} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(2x-4)e^{x^2-4x}}{4x-8} = \frac{1}{2}.$

(e) $\lim_{x\to 1}\frac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4)-1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{(\pi/4)\sec^2(\pi x/4)} = \frac{1}{\pi}.$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{x\ln^2(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\ln^2(x)+2\ln(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{2\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)+1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x} = +\infty.$

6. (a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto ax^2+bx$$

im Punkt $(1,2)$ ein globales Maximum hat.

(b) Seien $a,b\in\mathbb{R}$ so, dass $a<b$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3-9x^2+12x-5$$

auf dem Intervall $[a,b]$.

Lösung:

(a) Es muss folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
f(1) &= a+b = 2\\
f'(1) &= 2a+b = 0\\
f''(1) &= 2a < 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $a=-2$ (<0) und $b=4$. Somit hat $f(x) = -2x^2+4$ ein globales Maximum in $(1,2)$.

(b) Das Maximum auf dem Intervall $[a,b]$ wird entweder am Rand angenommen, also in a oder b, oder in einem kritischen Punkt (d.h. $f'(x)=0$). Wir suchen also zuerst lokale Maxima der Funktion f auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$.
Man hat

$$f'(x) = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2),$$

also sind $x_0 = 1, x_1 = 2$ die kritischen Punkte. Weiter ist

$$f''(x) = 12x - 18,$$

also hat f in x_0 ein lokales Maximum und in x_1 ein lokales Minimum. Ausserdem sieht man, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton wachsend, auf $(1, 2)$ monoton fallend, und auf $(1, \infty)$ monoton wachsend ist.

Der Wert von f an der Stelle x_0 ist $f(x_0) = f(1) = 0$. Man sucht weitere Punkte x mit $f(x) = f(x_0) = 0$. Durch Polynomdivision kriegt man

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 7x + 5) = 2(x-1)^2(x - \frac{5}{2}),$$

also ist $\frac{5}{2}$ die einzige andere Nullstelle von f.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $b \leq 1$, dann gilt $\max = f(b)$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a \leq 1$, in diesem Fall $\max = f(1)$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a > 1$, hier gilt $\max = \max(f(a), f(b))$
- $b > \frac{5}{2}$, dann gilt $\max = f(b)$

7. Die Hyperbolische Funktionen sinh und cosh sind wie folgt definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

(c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

Lösung:

(a) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$, und analog $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$, also folgt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(2+2) = 1$.

(b) $\sinh x \cdot \cosh y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)})$, also folgt $\sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y)$.

(c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x+2+e^{-x}}{4} = \cosh x + 1.$

$$2ye^x - (e^x)^2 = 1,$$

8. Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$?

(a) $g(x) = e^{x+4}$;

(b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

(c) $g(x) = e^{x^2}$;

(d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

(e) $g(x) = x^x$.

Lösung:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+4}}{e^x} = e^4 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x+4}} = e^{-4},$$

also $g(x) = O(e^x)$ und $e^x = O(g(x))$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 17x^{17}}{e^x} = 1 + 0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 17x^{17}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{17x^{17}}{e^x}} = 1,$$

also $g(x) = O(e^x)$ und $e^x = O(g(x))$.

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2-x} = +\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = 0,$$

also $e^x = O(g(x))$. Wir haben benutzt, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 = -\infty$.

(d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{200e^{\frac{1}{x^3}}}{e^x} = 0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{200e^{\frac{1}{x^3}}} = +\infty,$$

also $g(x) = O(e^x)$.

(e) Beachte $x^x = e^{x\ln(x)}$ und somit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln(x)}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln(x)-1)} = +\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-\ln(x))} = 0$$

also $e^x = O(x^x)$.