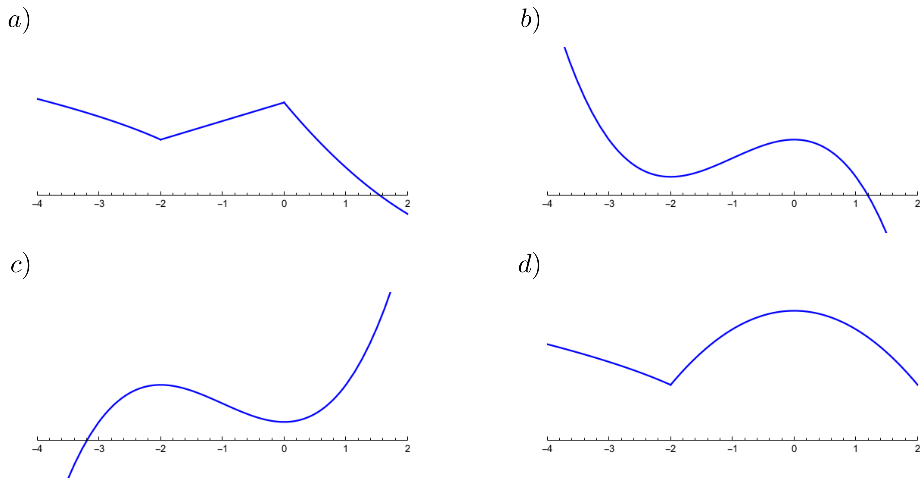
D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 6

MC-Aufgaben

1. Gegeben sind die folgende Funktionen:



Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

√ (b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

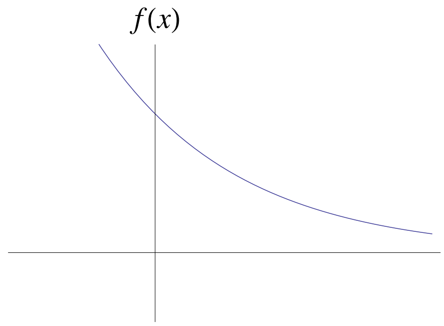
(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit verschwindender Ableitung.

(d) Die Funktion c) ist konvex.

Die Funktionen a) und d) sind nicht differenzierbar, weil der Graph einen Knick hat. Weiter haben die Graphen in b) und c) jeweils bei -2 und 0 ein Extremum (also eine Nullstelle der ersten Ableitung) und somit muss die zweite Ableitung eine Nullstelle haben (gemäss dem Mittelwertsatz).

Die Funktion a) ist an den Stellen -2 und 0 nicht differenzierbar und auf den Segmenten zwischen diesen Stellen ist die Funktion abwechselnd strikt monoton steigend oder strikt monoton fallend. Deshalb hat die Ableitung bei a) keine Nullstellen (weil strikt monoton bedeutet entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$). Der Graph von c) ist nicht konvex, da beispielsweise die Sekante von -3 zu 1 den Graph schneidet.

2. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

√ (b) Die erste Ableitung f' ist negativ

(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

√ (d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine konvexe Kurve, damit muss $f'' > 0$ sein.

3. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

√ (a) Ein Kreis.

Es gilt

$$x^2(t) + y^2(t) = \sin^2(1-t^2) + \cos^2(1-t^2) = 1,$$

was der Kreisgleichung des Einheitskreises entspricht. Der Term $1 - t^2$ nimmt auch alle Werte in $[-2\pi, 0]$ an für $t \in \mathbb{R}$, also wird der gesamte Einheitskreis gezeichnet.

(b) Eine Ellipse.

(c) Eine Parabel.

(d) Eine Gerade.

(e) Ein anderes Objekt.

(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

4. Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit der Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix}.$$

(a) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2,zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.

(b) Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.

(c) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

(d) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

√ (e) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

Wir sehen, dass die Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix}$ die Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 2^2$$

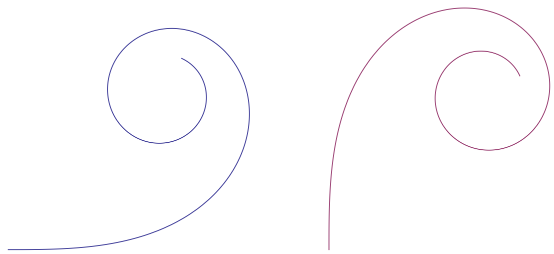
eines Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2 erfüllt. Wenn wir den Startpunkt ausrechnen $(t = 0)$, sehen wir, dass

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn t etwas grösser als Null wird, wird die x-Koordinate zunächst kleiner (wegen des negativen Vorzeichens vor dem Sinus) und die y-Koordinate wird ebenfalls kleiner. Wir durchlaufen den also Kreis im Gegenuhrzeigersinn.

Die Parametrisierung $(\sin t, \cos t)$ des Einheitskreises durchläuft für $t \in [0, 2\pi]$ den Kreis genau einmal, also durchläuft unsere Parametrisierung den Kreis für $t \in [0, \frac{2\pi}{6}]$ auch genau einmal.

5. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



√ (a) k_1 ist positiv

√ (b) k_2 ist negativ

√ (c) $t \to k_1(t)$ ist monoton wachsend

√ (d) $t \to k_2(t)$ ist monoton fallend

Die erste Kurve krümmt sich nach links, also ist k_1 positiv. Analog krümmt sich die zweite Kurve nach rechts, also ist k_2 negativ. Die Krümmungskreis wird bei beiden Kurven kleiner, d.h. der Krümmungsradius $1/|k|$ wird beidesmal kleiner. Das heisst, beide Krümmungen k_1 und k_2 sind im Absolutbetrag monoton wachsend. Da k_2 negativ ist, muss dieses monoton fallend sein.

Offene Aufgaben

6. Gegeben sei die reelle Funktion

$$f\,:\,x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

(b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

(d) Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

(e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

Lösung:

(a) Die Funktion $f(x) = x^{3/2}(x-2)^3$ ist nur für negative Werte von x nicht definiert. Folglich ist der Definitionsbereich von f das Intervall $[0,\infty)$.

Da $f(x) = 0$ nur dann gilt, wenn entweder $x^{3/2} = 0$ oder $(x-2)^3 = 0$ gilt, sind die Nullstellen von f gleich $x = 0$ und $x = 2$.

(b) Die Ableitung von f ist durch folgende Formel für all $x \in (0,\infty)$ gegeben:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^3 + 3x^{3/2}(x-2)^2 = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^2(3x-2).$$

Folglich sind die Nullstellen von f' im Intervall $(0,\infty)$ durch $x = 2$ und $x = 2/3$ gegeben. Es ist leicht zu überprüfen, dass $f'(x) < 0$ für $x \in (0,2/3)$, $f'(x) > 0$ für $x \in (2/3,2)$ und $f'(x) > 0$ für $x > 2$ gilt. Demnach ist f im Intervall $(0,2/3)$ streng monoton fallend und im Intervall $(2/3,\infty)$ monoton steigend.

Dadurch ergibt sich, dass die einzige lokale Minimalstelle von f an der Stelle $x = 2/3$ zu finden ist, und dass $x = 2/3$ auch eine globale Minimalstelle ist. Überdies folgt aus der oben bewiesenen Monotonie, dass die einzige lokale Maximalstelle von f bei $x = 0$ liegt (obwohl $f'(2) = 0$).

(c) Wie schon in 0b argumentiert, hat f eine globale Minimalstelle bei $x = 2/3$ und eine lokale Maximalstelle bei $x = 0$. Ausserdem erkennt man leicht, dass $f(x) \to \infty$ wenn $x \to \infty$ und dass f im Definitionsbereich stetig ist. Folglich ist $x = 0$ keine globale Maximalstelle und der Wertebereich von f genau das Intervall $[f(2/3),\infty)$, welches gleich

$$\left[-\frac{(2/3)^{3/2}4^3}{3^3},\infty\right)$$

ist.

(d) Die zweite Ableitung von f ist durch

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3(x-2)x^{1/2}(3x-2) + \frac{3(x-2)^2(3x-2)}{4x^{1/2}} + \frac{9}{2}(x-2)^2x^{1/2} \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(4x(3x-2) + (x-2)(3x-2) + 6(x-2)x\right) \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(21x^2 - 28x + 4\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\,\infty)$ gegeben. Also ist $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $21x^2 - 28x + 4 = 0$ gilt. Unter Zuhilfenahme der quadratischen Lösungsformel folgt, dass die Nullstellen von f'' durch $x = 2$, $x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 0.163$ und $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 1.171$ gegeben;

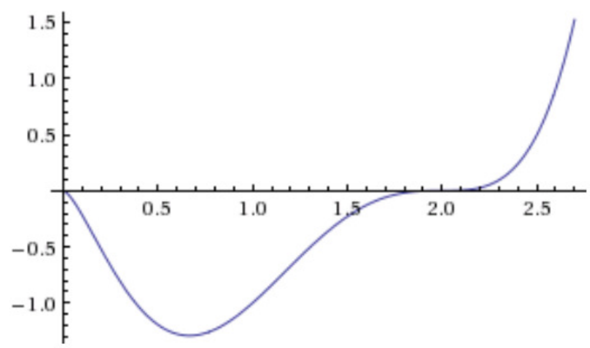
dies sind die möglichen Wendepunkte von f. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) > 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right)$ und dass $f''(x) > 0$ für $x \in (2, \infty)$ gilt. Folglich ist f strikt konvex auf

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup (2, \infty)$$

und strikt konkav auf

$$\left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right).$$

(e) Der Graph von f ist



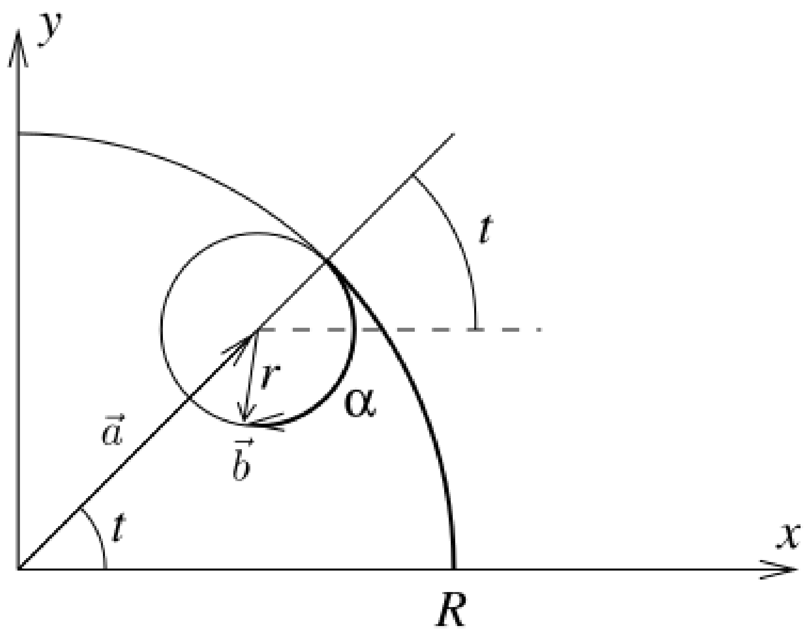
7. Ein Kreis vom Radius r rollt im Innern eines Kreises vom Radius R ab ($r < R$). Die Kurve, die dabei ein fester Punkt P der Peripherie des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*. Bestimmen Sie für den Fall $R = 4r$ eine Parameterdarstellung sowie eine implizite Darstellung der Kurve und skizzieren Sie diese.

Lösung:

Die Parametrisierung einer Hypozykloide finden wir folgendermassen: Zunächst finden wir eine Parametrisierung $\vec{a}(t)$ des Mittelpunktes M des kleinen Kreises und überlegen uns danach, welcher Vektor $\vec{b}(t)$ zwischen M und P liegt. Daraus erhalten wir die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{a}(t) + \vec{b}(t).$$

Wir legen fest, dass der kleine Kreis im Gegenuhrzeigersinn abrollt und mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir den Winkel (im Bogenmass), welcher M bereits zurückgelegt hat. Für $t = 0$ nehmen wir weiter an, dass P auf der x-Achse liegt.



Es ist klar, dass sich M auf einem Kreis mit Radius $R-r$ im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Es gilt also

$$\vec{a}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass der (variable) Berührpunkt der beiden Kreise beim Winkel t eine Distanz von Rt zurückgelegt hat. Alle Punkte auf dem kleinen Kreis bewegen sich also relativ zu diesem Berührpunkt ebenfalls um diese Distanz im Uhrzeigersinn, also gilt für den Winkel $\alpha(t)$ zwischen P und dem (variablen) Berührpunkt

$$r\alpha(t) = Rt \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(t) = \frac{Rt}{r}.$$

Um $\vec{b}(t)$ zu bestimmen, sind wir jedoch nicht an $\alpha(t)$ interessiert, sondern am Winkel zwischen $\vec{b}(t)$ und der Horizontalen. Wie wir aus der Skizze sehen, ist dieser Winkel gleich

$$\alpha(t) - t = \frac{Rt}{r} - t = \frac{Rt-rt}{r} = \frac{R-r}{r}\,t,$$

es ergibt sich also

$$\vec{b}(t) = r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \vec{a}(t)+\vec{b}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}.$$

Mit $r = \frac{R}{4}$ folgt:

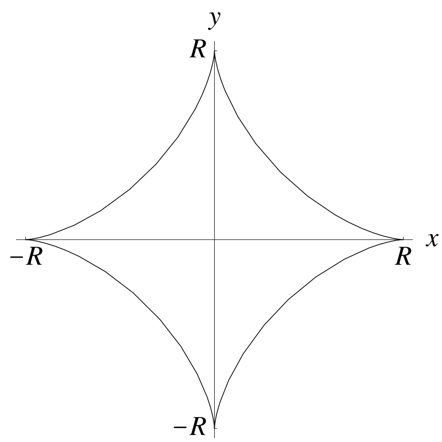
$$x(t) = \frac{R}{4}(3\cos(t)+\cos(3t)) = R\cos^3(t)$$
$$y(t) = \frac{R}{4}(3\sin(t)-\sin(3t)) = R\sin^3(t),$$

wobei wir benutzt haben, dass $\cos^3(t) = \frac{1}{4}(3\cos(t)+\cos(3t))$ und $\sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$ (siehe Serie 4 Aufgabe 7).

Aus der Identität $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ erhalten wir die implizite Darstellung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Es ist eine Asteroide mit vier Spitzen: x- und y-Achse sind dort Tangenten.



8. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von C.
Hinweis: Was ist $\frac{y}{x}$?

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

(c) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen?

Lösung:

(a) Für $t \neq 0$ haben wir $\frac{y}{x} = t$. Einsetzen in die Gleichung für x gibt:

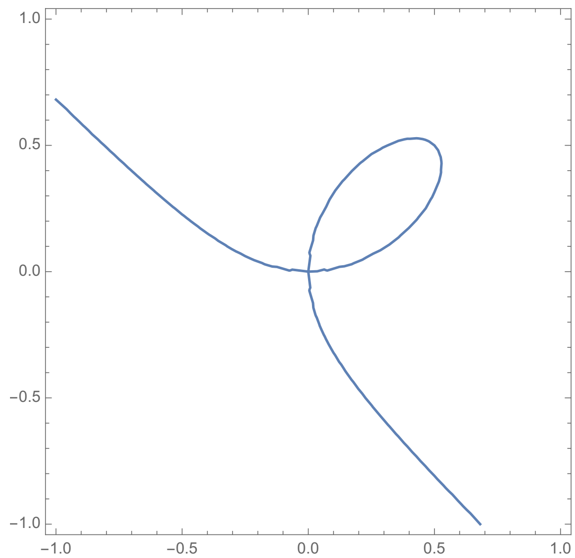
$$x = \frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1} = \frac{yx^2}{y^3 + x^3},$$

Und so,

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$

Falls $t = 0$, dann befindet sich die Kurve C im Punkt $(0, 0)$, der die obige Gleichung auch erfüllt. Somit ist die implizite Darstellung von C gegeben durch

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$



(b) Wir setzen $x = y$ in der impliziten Gleichung für C und erhalten

$$x^3 + x^3 - x \cdot x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^3 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}.$$

$(x, y) = (0, 0)$ entspricht dem Parameter $t = 0$.
$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entspricht dem Parameter $t = \frac{1/2}{1/2} = 1$.
Die Tangentensteigung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{2t(t^3+1)-t^2\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{(t^3+1)-t\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{2t(t^3+1) - t^2 \cdot 3t^2}{(t^3+1) - t \cdot 3t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

Die Tangente durch $(x, y) = (0, 0)$ ist diejenige zu $t = 0$, also

$$y = 0.$$

Da die Kurve C symmetrisch ist bezüglich $y = x$, hat sie eine zusätzliche Tangente bei $(0, 0)$, und zwar die y-Achse $x = 0$.
Die Tangente durch $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist diejenige zu $t = 1$, also

$$y = -x + q$$

für $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, d. h. $x + y - 1 = 0$.

(c) Aus **b)** wissen wir, dass die Tangenten durch $(0, 0)$ gerade die Koordinatenachsen sind. Es gibt aber noch mehr: Wir setzen die Steigung gleich Null und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \sqrt[3]{2}.$$

Das ergibt die Punkte $(x, y) = (0, 0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$, wo die Tangenten horizontal, also parallel zur x-Achse sind.
Da die Kurve symmetrisch ist bezüglich $y = x$, sind die Tangenten in den Punkten $(x, y) = (0, 0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3})$ vertikal, d. h. parallel zur y-Achse.

9. Die Ebene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

(b) Berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ sowie die Parametrisierung der Evolute.

(c) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in (a) gelisteten Eigenschaften.

Lösung:

(a)
- **Schnittpunkte mit der x-Achse**: es muss $y(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ erhalten wir

$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin t(1 + \cos t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \pi.$$

Die Steigung der Tangente im Punkt $(x(t), y(t))$ ist

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{\cos t + \cos 2t}{\sin t + \sin 2t}.$$

Für $t = 0$ haben wir: $x(t) = 3$ und die Steigung ist $+\infty$, das heisst: die Tangente im Punkt $(3, 0)$ ist eine vertikale Gerade.
Wir haben $x(\pi) = -1$ und für $t \to \pi$ gilt es:

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{t\to\pi} \frac{\sin t + 2\sin 2t}{\cos t + 2\cos 2t} = 0.$$

Also die Tangente im Punkt $(-1, 0)$ ist eine horizontale Gerade.

- **Schnittpunkte mit der y-Achse**: es muss $x(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ erhalten wir

$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0 \quad 2u^2 + 2u - 1 = 0,$$

wobei wir die Substitution $u = \cos t$ benutzt haben. Diese Gleichung hat Lösungen $u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Da $u = \cos t \geq -1$ und $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$, haben wir nur die Lösung $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Es gibt zwei Zahlen $t \in [0, 2\pi]$ für die $\cos(t) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Nämlich $t_1 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ und $t_2 = 2\pi - t_1$. Es gilt:

$$y(t_1) \approx 2.55 \quad y(t_2) \approx -2.55,$$

und die Steigungen der Tangenten sind

$$\frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\dot{y}(t_2)}{\dot{x}(t_2)} = -\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 0.$$

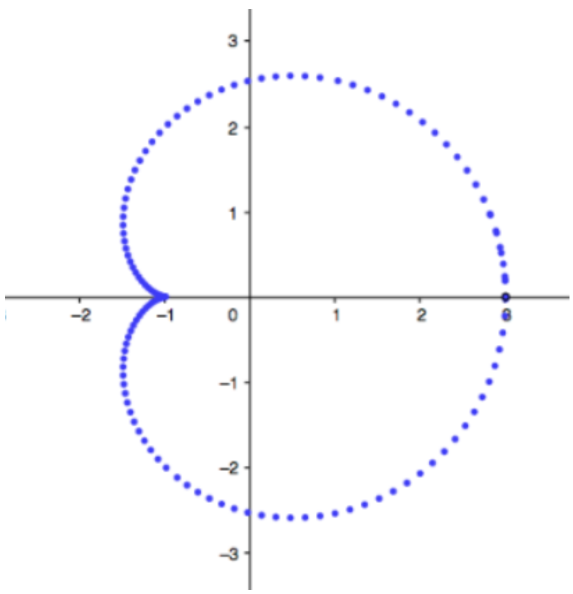
- **Punkte, wo die Tangente eine horizontale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung gleich Null ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{y}(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 0$. Dies gilt für $t = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Wir wissen schon, dass für $t = \pi$ die Tangente horizontal ist. Für die andere zwei Punkte gilt $\dot{x}(t) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$. Also haben wir eine horizontale Tangente in den Punkten

$$(x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0),$$
$$\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(x\left(\frac{5\pi}{3}\right), y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

- **Punkte, wo die Tangente eine vertikale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung $+\infty$ ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{x}(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = 0$. Dies gilt für $t = 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Für $t = 0$ wissen wir schon, dass die Tangente vertikal ist und für $t = \pi$, dass die Tangente horizontal ist. Es gilt $\dot{y}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dot{y}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \infty$. Also haben wir eine vertikale Tangente in den Punkten

$$\begin{aligned}
&(x(0), y(0)) = (3, 0) \\
&\left(x\left(\frac{2\pi}{3}\right), y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
&\left(x\left(\frac{4\pi}{3}\right), y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Mit diesen Eigenschaften, kann man die Kurve skizzieren.



(b) Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

In unserem Fall sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t + \sin(2t) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t + 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\cos(2t) \\ -2\sin t - 4\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (-2\sin t - 2\sin(2t))^2 + (2\cos t + 2\cos(2t))^2 \\
&= 4 + 4 + 8(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\
&= 8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)).
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t) &= (-2\sin t - 2\sin(2t))(-2\sin t - 4\sin(2t)) - (-2\cos t - 4\cos(2t))(2\cos t + 2\cos(2t)) \\
&= 8 + 4 + 12(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\
&= 12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)).
\end{aligned}$$

aus. Daher kriegen wir

$$k(t) = \frac{12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))}{8^{\frac{3}{2}}(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(\cos(t) + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei haben wir benutzt, dass $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ und $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$.
Die Parameterdarstellung der Evoluten ist

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - \dot{y}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \\ y(t) + \dot{x}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \end{pmatrix}.$$

Mit den obigen Berechnungen kriegen wir

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) - (2\cos t + 2\cos(2t))\frac{2}{3} \\ 2\sin t + \sin(2t) + (-2\sin t - 2\sin(2t))\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cos t - \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

(c) Das kann analog wie in Teilaufgabe (a) gemacht werden.