D-MAVT/D-MATL — Analysis I — HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 7

MC-Aufgaben

1. Die beiden in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Kurven

$$\begin{array}{lcccl} K_1 & : & r & = & \sin^2\varphi \\ K_2 & : & r & = & \frac{1}{2}|\sin(2\varphi)| \end{array}$$

schneiden sich für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt P an die Kurve K_1. Welcher der folgenden Punkte liegt nicht auf t_1?

(a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\left(1, \frac{6-\sqrt{2}}{2}\right)$

√ (e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Berechnung des Schnittpunktes der Kurven K_1 und K_2: es ist die Gleichung

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}|\sin(2\varphi)| \qquad (1)$$

mit $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zu Lösen. Für $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\sin(2\varphi) > 0$. Aus (1) erhalten wir $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi$, also $\sin\varphi = \cos\varphi$ (da $\sin\varphi > 0$ für $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Also

$$\varphi = \frac{\pi}{4} =: \varphi_0$$

Die Parameterdarstellung r_1 der Kurve K_1 ist:

$$r_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\text{und } \dot{r_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\sin\varphi \\ 3\sin^2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}\right)$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist somit

$$P := r_1(\varphi_0) = \left(\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}, \sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad .$$

Die Parameterdarstellung der Tangente t_1 an die Kurve K_1 im Punkt P ist somit:

$$t \mapsto r_1(\varphi_0) + t\dot{r}_1(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Die Parameterdarstellung von t_1 lässt sich auch schreiben als

$$\begin{array}{ll} (I) & x = \frac{\sqrt{2}}{4} + t\frac{\sqrt{2}}{4} \\ (II) & y = \frac{\sqrt{2}}{4} + t\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

Wir eliminieren den Parameter t aus den Gleichungen (Berechne $3 \cdot (I) - (II)$):

$$3x - y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es lässt sich nun leicht nachprüfen, dass $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ die Gleichung nicht erfüllt und somit nicht auf t_1 liegt.

2. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

√ (b) falsch

Es gilt $\dot{\vec{r}}(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t\right)$ und damit

$$\begin{aligned} \langle r(t), \dot{r}(t) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)) \\ &= e^{2t} > 0, \text{ für alle } t. \end{aligned}$$

3. Es seien $C, l \in (0, +\infty)$. Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\rho = Ce^{l\phi},$$

wobei $\phi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

√ (a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\phi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\phi)$ ist konstant.

Richtig. Eine Parametrisierung der Bernoullischen Spirale (Spira mirabilis) wird durch

$$\vec{r}(\phi) = \begin{cases} x(\phi) & = & Ce^{l\phi}\cos(\phi) \\ y(\phi) & = & Ce^{l\phi}\sin(\phi) \end{cases}$$

gegeben, und also

$$\dot{\vec{r}}(\phi) = \begin{cases} x(\phi) & = & Cle^{l\phi}\cos(\phi) - Ce^{l\phi}\sin(\phi) \\ y(\phi) & = & Cle^{l\phi}\sin(\phi) + Ce^{l\phi}\cos(\phi) \end{cases}$$

Der Winkel α wird nach definition des Skalarproduktes folgenderweise berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}(\phi)\cdot\dot{\vec{r}}(\phi)}{|\vec{r}(\phi)|\cdot|\dot{\vec{r}}(\phi)|} = \frac{C^2le^{2l\phi}}{\sqrt{C^2e^{2l\phi}}\cdot\sqrt{C^2l^2e^{2l\phi}+C^2e^{2l\phi}}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}},$$

der unabhängig von ϕ ist.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Falsch. Sehen Sie bitte die Antwort c).

√ (c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Richtig. Die Gleichung

$$y(\phi) = Ce^{l\phi}\sin(\phi) = 0,$$

hat die Lösungen $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte mit der positiven x-Achse sind also

$$(x(2\pi k), 0) = (Ce^{2l\pi k}, 0), k \in \mathbb{Z}.$$

Der Quotient ist also unabhängig von k und ist gleich

$$\frac{x(2\pi k)}{x(2\pi(k-1))} = \frac{Ce^{2l\pi k}\cos(2\pi k)}{Ce^{2l\pi(k-1)}\cos(2\pi(k-1))} = e^{2\pi l}.$$

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

Falsch. Im Spezialfall $C = l = 1$ ist die Evolute der Bernoullische Spirale

$$\vec{r}(\phi) = (e^{\phi}\cos(\phi), e^{\phi}\sin(\phi))$$

durch die Kurve

$$\vec{r}(\phi) = (-e^{\phi}\sin(\phi), e^{\phi}\cos(\phi))$$

gegeben. Insbesondere kriegen wir diese Evolute durch einer Drehung der Spirale von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn.

4. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

√ (e) Keines von diesen.

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + bi) \\ &= 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}\mathbf{i} - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b = -5$ der Fall, welches nicht auftaucht.

5. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

√ (c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

Um uns die Arbeit zu erleichtern, verwenden wir, dass $z^6 = (z^2)^3$. Wir berechnen zuerst z^2 mit Hilfe der binomischen Formel,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wegen $|z^2| = \sqrt{8+8} = 4$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Identität die Polarformdarstellung

$$z^2 = 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\exp(i\tfrac{\pi}{4}).$$

Daraus folgt schliesslich

$$z^6 = (z^2)^3 = \left(4\exp(i\tfrac{\pi}{4})\right)^3 = 64\exp(i\tfrac{3}{4}\pi).$$

6. Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

Falsch. Der Betrag von $(1+i)^{2000}$ muss $\sqrt{2}^{2000}$ und damit viel grösser als $\sqrt{2}$ sein.

(b) -2^{1000}

Falsch. Aber 2^{1000} wäre richtig gewesen. Es gilt $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi i}{4}}$ und folglich $(1+i)^{2000} = \sqrt{2}^{2000}(e^{\frac{\pi i}{4}})^{2000} = 2^{1000}e^{500\pi i} = 2^{1000}(e^{2\pi i})^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$.

√ (c) $(2i)^{1000}$

Richtig. Es gilt $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ und deshalb

$$(1+i)^{2000} = ((1+i)^2)^{\frac{2000}{2}} = (2i)^{1000}.$$

Beachte, dass zudem

$$(2i)^{1000} = 2^{1000}i^{1000} = 2^{1000}(i^4)^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$$

gilt.

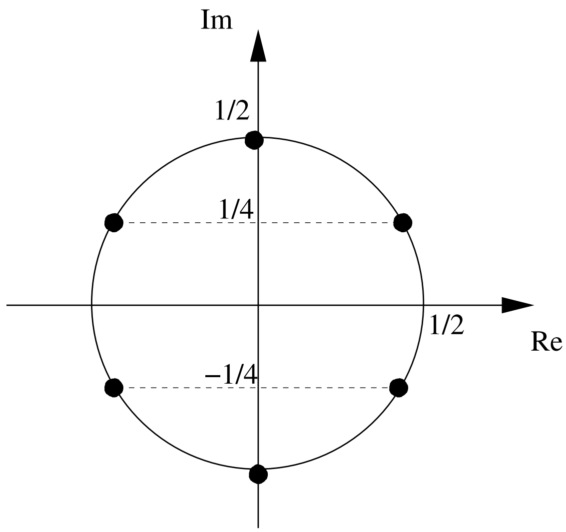
(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

Falsch. Das Argument von $(1+i)^{2000}$ muss bis auf ein Vielfaches von 2π mit $2000 \cdot \frac{\pi}{4}$ übereinstimmen.

(e) 2^{2000}

Falsch. Der Betrag ist zu gross.

7. Alle schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen Lösungen der Gleichung ...



(a) $z^8 = \frac{1}{256}$

(b) $z^6 = \frac{1}{64}$

(c) $z^6 = \frac{1}{2}$

√ (d) $z^6 = -\frac{1}{64}$

Korrekt!

Offenbar gilt

$$\left(\frac{i}{2}\right)^6 = \frac{(-1)^3}{2^3 \cdot 2^3} = -\frac{1}{64},$$

sodass $\frac{i}{2}$ eine Lösung von $z^6 = -\frac{1}{64}$. Alle anderen Lösungen erhält man durch Multiplikation dieser Lösung mit allen sechsten Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i}{6} \cdot k}$,$(k = 1, \ldots, 5)$:

$$z_k = \frac{i}{2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6} \cdot k}, \qquad k = 1, \ldots 5.$$

Dies sind gerade die Punkte auf dem Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$, welche man erhält, wenn man $\frac{i}{2}$ immer wieder um 60° weiterdreht; also gerade die abgebildeten Punkte.

Offene Aufgaben

8. Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

(b) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

Lösung: Wir definieren $x(t) = t$ und $y(t) = t^3$. Die ersten und die zweiten Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1, & \dot{y}(t) &= 3t^2, \\ \ddot{x}(t) &= 0, & \ddot{y}(t) &= 6t. \end{aligned}$$

Aus den Formeln für die Krümmung und Evolute von $\vec{r}$ folgt, dass

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{3/2}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ ist und

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{y},\, y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{x} \right) \\ &= \left(t - \frac{1 + 9t^4}{6t} \cdot 3t^2,\, t^3 + \frac{1 + 9t^4}{6t} \right) \\ &= \left(\frac{t - 9t^5}{2}, \frac{1 + 15t^4}{6t} \right) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Evolute ist an der Stelle $t = 0$ also nicht definiert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kurve dort einen Wendepunkt besitzt, also Krümmung Null hat.

(a) Die erste Ableitung der Krümmung ist

$$k'(t) = \frac{6(1 - 45t^4)}{(1 + 9t^4)^{5/2}}.$$

Darum hat k mögliche Extrema an den Stellen $t = \pm 45^{-1/4}$. Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Wendepunkte handelt, könnten wir die zweite Ableitung der Krümmung berechnen und das bekannte Kriterium verwenden. Hier wollen wir uns dies jedoch ersparen und beschreiten einen anderen Weg. Es gilt nämlich

$$\lim_{t \to \pm\infty} k(t) = 0,\ k(45^{-1/4}) > 0 \text{ und } k(-45^{-1/4}) < 0,$$

somit liegt an der Stelle $t = -45^{-1/4}$ (bzw. $t = 45^{-1/4}$) ein globales Minimum (bzw. ein globales Maximum) der Krümmung vor.

(b) Für kleine t ist $\vec{z}(t)$ asymptotisch zu $\vec{s}(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{6t}\right)$, da die höheren Potenzen von t vernachlässigbar sind.

9. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

(b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung:

(a) Definiert man $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \vec{\gamma}(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1, \sinh t)$ und $\ddot{\vec{\gamma}}(t) = (0, \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius r_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$ ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2(0)}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum z_0 ist durch die folgende Formel gegeben (Evolute):

$$z_0 = \vec{\gamma}(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei $n : t \longmapsto n(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für n gilt:

$$n(t) = (-\sinh t, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh(0), 1)}{\cosh(0)} = (0, 2).$$

(b) Das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Radius r_0 und Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) = \vec{\gamma}(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} &= (t, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t, 1)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t, \cosh t + \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t). \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{z}(0) = \tanh^2(0) \cdot (1, \sinh(0)) = (0, 0)$.

[1] Falls Sie r_0 bei (a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.

10. Finden Sie in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Geben Sie die Lösungen jeweils auch in Polarform an.

(a) $z^6 = -8$

(b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

(c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

Lösung:

(a) Die Gleichung lässt sich als $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$ darstellen, also sind die Lösungen in Polarform

$$z_k = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{6}\right)i}, \quad k = 0, \ldots, 5;$$

also $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

In Normalform lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_1 &= i\sqrt{2},\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_4 &= -i\sqrt{2},\\
z_5 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(b) Wir klammern zuerst aus:

$$z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = z(z^4 - 8(-1 - i\sqrt{3})) = 0.$$

Offensichtlich ist also $z = 0$ eine Lösung. Für den anderen Faktor erhalten wir mit der Polardarstellung $z = re^{i\phi}$ die Gleichung

$$z^4 = r^4 e^{4i\phi} = 8(-1 - i\sqrt{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Die weiteren Lösungen lauten damit in Polarform

$$z_k = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{4}\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In Normalform sind die Lösungen der Gleichung also

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3},\\
z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i,\\
z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3},\\
z_3 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i;\\
\text{und } z_4 &= 0.
\end{aligned}$$

(c) Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben z_1 auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass $(z - z_1)(z - z_2)$ ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle z_3, welche reell sein muss (Nullstellen sind reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf; aber es sind in diesem Fall nur drei). Das ergibt:

$$\begin{aligned} & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3(z - (3+i))(z - (3-i))(z - z_3) \\ \iff\quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3) \\ \iff\quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten p, q, z_3 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 12 &= 18 + 3z_3 &&\Rightarrow \underline{z_3 = -2} \\ p &= 30 + 18z_3 &&\Rightarrow \underline{p = -6} \\ q &= -30z_3 &&\Rightarrow \underline{q = 60} \end{aligned}$$

Zusammengefasst sind die jeweiligen Normal- und Polarformen der Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + i = \sqrt{10}e^{i\arctan(1/3)}, \\ z_2 &= 3 - i = \sqrt{10}e^{-i\arctan(1/3)}, \\ z_3 &= -2 = 2e^{i\pi}. \end{aligned}$$

11. (a) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w + z| < C$.

(b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $|w| < 1$. Dann gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| < 1 + 1 = 2.$$

Wir möchten nun zeigen, dass für $0 < D < 2$ existieren es $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ und $|z + w| = D$.
Nämlich, betrachte $z = w = \frac{D}{2}$. Dann

$$|z| = |w| = \frac{D}{2} < \frac{2}{2} = 1$$

und

$$|z + w| = 2\frac{D}{2} = D.$$

Dies zeigt, dass $C = 2$ die kleinste solche Zahl ist.

(b) Da z_1 und z_2 Lösungen der Gleichung $z^n = c$ sind, gilt es $z_1^n = c = z_2^n$, das heisst

$$\sqrt{2}^n e^{i\frac{5\pi}{16}n} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{15\pi}{16}n}.$$

Das impliziert:

$$\begin{aligned} & \frac{5\pi}{16}n = -\frac{15}{16}\pi n + k2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff\quad & \pi\left(\frac{5n}{16} + \frac{15n}{16} - 2k\right) = 0 \\ \iff\quad & \frac{20n}{16} - 2k = 0 \\ \iff\quad & k = \frac{5}{8}n. \end{aligned}$$

Da k ganzzahlig sein muss, folgt es $n \geq 8$.
Für $n = 8$ erhalten wir

$$c = (\sqrt{2})^8 e^{i \frac{5\pi}{16} 8} = 16 e^{i \frac{5\pi}{2}} = 16i.$$