D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 8

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

√ (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z \cdot i) > \operatorname{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < -\operatorname{Im}(z)\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z \cdot i) > \operatorname{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Re}(z)\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 0\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(-z) - \operatorname{Im}(-z) > 0\}$

(a) ist richtig. Für eine beliebige komplexe Zahl $a + ib$ gilt

$$\operatorname{Re}(z \cdot i) = \operatorname{Re}(a + ib) \cdot i) = \operatorname{Re}(ai - b) = -b = -\operatorname{Im}(z).$$

Diese beide Mengen sind deswegen identisch.

(b) ist falsch. Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ gilt

$$\operatorname{Im}(z \cdot i) = \operatorname{Im}(ai - b) = a = \operatorname{Re}(b).$$

Folgen sind die beide Mengen disjunkt (d.h. sie haben kein Element gemeinsam). Zum Beispiel liegt $z = 1$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

(c) ist falsch. Zum Beispiel liegt $z = -1 - i$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

(d) ist falsch. Es gilt $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re}(z)$ und analog für $\operatorname{Im}(-z)$, also sind die beide Mengen disjunkt. Zum Beispiel liegt $z = 1$ in der linken Menge, jedoch nicht in der rechten.

2. Sei $n \geq 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ – also insbesondere auch mit Koeffizienten in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Weiter wissen wir, dass für eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, wenn das Polynom reelle Koeffizienten hat. Hätte das Polynom nun keine reelle Nullstelle, so hätte es eine gerade Anzahl an Nullstellen (mit Vielfachheit), was im Widerspruch zum Fundamentalsatz der Algebra steht. Also muss es mindestens eine reelle Nullstelle besitzen.

Kennt man sich etwas mit Stetigkeit und dem Grenzwertverhalten von Polynomen aus, so kann man die Existenz einer reellen Nullstelle auch wie folgt zeigen:

Sei $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein solches Polynom, d.h. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Weiter nehmen wir für den Moment an, dass $a_n > 0$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} x^{-n}\right)}_{\to 1 \text{ für } x \to \pm\infty}. \end{aligned}$$

Da $a_n > 0$ gilt, strebt $a_n x^n$ gegen ∞ für $x \to \infty$ und gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$. Das heisst, die reelle Funktion $p(x)$ ist für sehr kleines x kleiner als 0 und für sehr grosses x grösser als 0. Jedoch ist $p(x)$ stetig und nach dem Zwischenwertsatz muss es daher eine Nullstelle haben. Dies ist die gesuchte reelle Nullstelle.

Der Fall $a_n < 0$ lässt sich genauso behandeln.

3. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

$\checkmark$ (a) 0

(b) $\frac{-i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Die Lösungsmengen für $z^4 = 1$ und $w^3 = -i$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} &= \{1, i, -1, -i\} \\ \{w \in \mathbb{C} : w^3 = -i\} &= \left\{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\} \end{aligned}$$

Damit ist $0 = -i + i$ ein möglicher Wert der Summe $z + w$ für $z \in \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$ und $w \in \{w \in \mathbb{C} : w^3 = -i\}$.

4. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

√ (b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

√ (d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

Durch partielle Integration erkennen wir, dass die Stammfunktionen von f Funktionen der Form $xe^x - e^x + 7x + C$ für eine Konstante C sind. Die Funktionen in (b) und (d) sind dieser Form, die Funktionen in (a) und (c) nicht.

5. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

√ (a) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,dt$

√ (b) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$

(c) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$

√ (d) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,dt$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend. Eine geometrische Begründung: Ausser bei $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0 wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

6. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

√ (d) $f'(x) = \sin(x)$.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

Offene Aufgaben

7. Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p.

(a) Was sind r_p, c_p für $p(x) := x^5 + 1$?

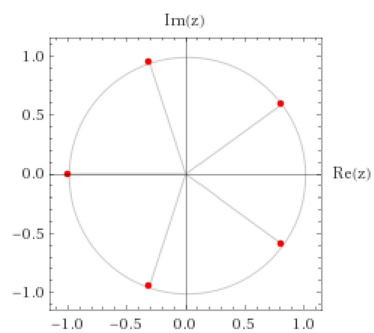
(b) Begründen Sie wieso immer gilt $r_p + c_p = 5$.

(c) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?

(d) Finden Sie alle möglichen Werte von r_p. Geben Sie weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.

Lösung:

(a) Weil $(-1)^5 = -1$ ist -1 eine Nullstelle von p. Es bezeichne $\xi_k := e^{2\pi i \frac{k}{5}}$ für $k = 0, \ldots, 4$ die 5-ten Einheitswurzeln. Die Nullstellen von p sind also $-\xi_k$ für $k = 0, \ldots, 4$, weil $(-\xi_k)^5 = (-1)^5 \xi_k^5 = -1$. Für $k \geq 1$ ist ξ_k nicht-reell, also gilt $r_p = 1$ und $c_p = 4$. Dies kann man auch dem folgenden Bild entnehmen.



(b) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ – also insbesondere auch mit Koeffizienten in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Es folgt also $r_p + c_p = 5$.

(c) Wir wissen, dass für eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, wenn ein Polynom reelle Koeffizienten hat. Somit ist c_p immer durch 2 teilbar und der Fall $c_p = 3$ kann also nicht eintreten.

(d) In der letzten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass c_p immer durch 2 teilbar sein muss. Weiterhin wissen wir wegen Teilaufgabe b), dass $c_p \leq 5$. Somit sind folgende Konstellationen denkbar:

i. $r_p = 1, c_p = 4$

ii. $r_p = 3, c_p = 2$

iii. $r_p = 5, c_p = 0$.

Die Konstellationen werden beispielsweise durch folgende Polynome realisiert

i. $p(x) = (x-1)(x^2+1)^2 = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$,

ii. $p(x) = (x-1)^3(x^2+1) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$,

iii. $p(x) = (x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

8. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1-3i)z^3 - 2 - 2i = 0.$$

Lösung:

Mit der Substitution $u = z^3$ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$u^2 + (1-3i)u - 2 - 2i = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt

$$\left(u + \frac{1-3i}{2}\right)^2 = 2 + 2i + \frac{1}{4}(1-3i)^2 = \frac{1}{2}i$$

Gesucht ist somit $w = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{1}{2}i$. Aus den beiden Gleichungen $x^2 - y^2 = 0$ und $2xy = 1/2$ folgt

$$x^4 = \frac{1}{16}$$

mit den reellen Lösungen $x = \pm 1/2$. Also sind mit $w = (1+i)/2$ oder $w = -(1+i)/2$ die Wurzeln gegeben. Für den gesuchten Wert u erhalten wir die beiden Möglichkeiten

$$u = w - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = \begin{cases} 2i \\ -1+i \end{cases}$$

In Polarkoordinaten ist

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Lösungen der Gleichung $z^3 = u$ erhalten wir aus der Polarkoordinatendarstellung von u, indem die dritte Wurzel des Betrags gezogen wird und das Argument ϕ durch 3 geteilt wird. Um alle möglichen Argumente im Intervall $[0, 2\pi]$ zu bekommen, müssen wir noch die weiteren Möglichkeiten $(\phi + 2\pi)/3$ und $(\phi + 4\pi)/3$ berücksichtigen. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
z_2 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
z_3 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\
z_4 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
z_5 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\\
z_6 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

9. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u+v}.$$

Hinweis: Substituieren Sie $z = \frac{v}{u}$.

Lösung: Zunächst beobachten wir, dass die Gleichung nur gelten kann, wenn $u \neq 0$,$v \neq 0$ und $u + v \neq 0$ gilt. Setzen wir $z = v/u$, so folgt aus der gewünschten Identität

$$1 = \frac{u+v}{u} + \frac{u+v}{v} = 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

bzw. die quadratische Gleichung

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung,

$$0 = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

bestimmen wir die beiden Lösungen dieser Gleichung

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit diesem Resultat für z erhalten wir zu jedem $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwei Zahlen

$$v_\pm = -\frac{1}{2}\left(1 \mp i\sqrt{3}\right) u,$$

für die die gewünschte Gleichung erfüllt ist.

10. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

(b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

(c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

Lösung:

(a) Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\
&= \frac{-ix^2 + xy - 2ix - xy - iy^2 - 2y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x - x^2 - y^2}{x^2+y^2} i.
\end{aligned}$$

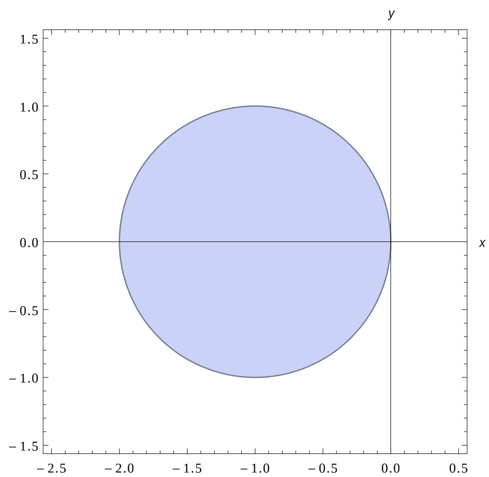
Das Gebiet B ist damit gegeben durch

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x - x^2 - y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Umgeformt ergibt das

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x - x^2 - y^2}{x^2+y^2} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x - x^2 - y^2 > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 + 2x + y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 > (x+1)^2 - 1 + y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 > (x+1)^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.



(b) Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z+1+iy)(z+1-iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$
\begin{array}{llllll}
(z^3 & +\frac{7}{2}z^2 & +7z & +6 &): & (z^2+2z+1+y^2) = z + \frac{3}{2} \\
-(z^3 & +2z^2 & +(1+y^2)z & &) & \\
\hline
 & \frac{3}{2}z^2 & +(6-y^2)z & +6 & & \\
-(& \frac{3}{2}z^2 & +3z & +\frac{3}{2}(1+y^2) &) & \\
\hline
 & & (3-y^2)z & +(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y^2) & &
\end{array}
$$

Es bleibt also der Rest

$$(3-y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also $y = \pm\sqrt{3}$ und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

(c) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

11. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \left(x^2+1\right)^2 \, dx$

(b) $\int \tan^2 x \, dx$

(c) $\int x^2 \ln x \, dx$

(d) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

(e) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

Lösung:

(a) $\int (x^2+1)^2 \, dx = \int (x^4+2x^2+1) \, dx = \int x^4 \, dx + 2 \int x^2 \, dx + \int 1 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C.$

(b) $\int \tan^2(x) \, dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right) dx = \tan(x) - x + C.$

(c) $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$

(d) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^\pi + \int\limits_0^\pi 2x \cos x \, dx = \pi^2 + \left[2x \sin x\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi 2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4.$

(e) Wir benutzen partielle Integration: wir leiten x ab und integrieren $\frac{1}{\sin^2 x}$. Es gilt zunächst $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ und damit

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x + C,$$

also

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx = \int \underbrace{x}_{\downarrow} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}^{\uparrow} \, dx = x \cdot (-\cot x) - \int 1 \cdot (-\cot x) \, dx$$

$$= -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = -x \cot x + \ln|\sin x| + C.$$

Der Pfeil $\downarrow$ bzw. $\uparrow$ bedeutet dabei ableiten bzw. integrieren.
Im letzten Schritt haben wir die *logarithmische Ableitung* benutzt: Es gilt immer $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)|$ unter Benützung der Kettenregel (sofern $f(x)$ nirgends Null ist).

12. Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b, a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Lösung: Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2 + b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Die Fläche unter der Parabel ist wegen der Symmetrie gegeben durch

$$\begin{aligned} F(a,b) &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(-ax^2 + b\right)\, dx = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \\ &= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}} \end{aligned}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b,\ b > 0.$$