D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 9

MC-Aufgaben

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

√ (a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$

Beachte

$$(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Man kann also den Ansatz

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

machen. Durch Multiplikation mit $(x-1)^2(x+1)$ und Koeffizientenvergleich berechnet man $A = 1, B = 2, C = 2$.

2. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1$.

Es gilt $\cos(x) = \frac{u^2-1}{2}$ und folglich

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = \int \frac{dx}{2+\frac{u^2-1}{2}} = \int \frac{2dx}{3+u^2}.$$

Allerdings ist $du/dx = \pm\sin(x)/\sqrt{2\cos(x)+1} \neq 1$, woraus $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} \neq \int \frac{2du}{3+u^2}$ folgt.

(b) $u = 2 + \cos(x)$.

Es gilt $du = -\sin(x)dx$ und folglich ist $dx = -\frac{du}{\sin(x)}$. Somit ist $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = -\int \frac{du}{u\sin(x)}$. Damit dieses Integral gleich $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ ist, müsste $-u\sin(x) = \frac{3+u^2}{2}$ gelten. Dies ist allerdings nicht der Fall. In der Tat ist $-u\sin(x)$ negativ für $x = \pi/4$, während $\frac{3+u^2}{2}$ immer positiv ist.

√ (c) $u = \tan(x/2)$.

Es sei $u = \tan(x/2)$. Dann gilt $du = \frac{dx}{2\cos^2(x/2)}$ und somit $dx = 2\cos^2(x/2)du$. Als Nächstes drücken wir $\cos^2(x/2)$ durch Terme in u aus:

$$u = \tan(x/2) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(x/2)}}{\cos(x/2)}.$$

Schreiben wir diese Gleichung um, so erhalten wir $\cos^2(x/2) = \frac{1}{u^2+1}$. Folglich ist also $dx = \frac{2du}{u^2+1}$ und

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du.$$

Nun müssen wir $\cos(x)$ durch Terme in u ausdrücken. Unter der Verwendung der Doppelwinkelformel für den Kosinus folgt $\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{u^2+1} - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$. Damit gilt also, wie gewünscht,

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{2du}{3+u^2}.$$

(d) $u = 4\tan(x)$.

In diesem Fall ist $du = \frac{4dx}{\cos^2(x)}$ und folglich $dx = \frac{\cos^2(x)du}{4}$. Wie in der Lösung zu (c) gilt

$$u = 4\tan(x) = \frac{4\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm 4\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$$

und somit $\cos^2(x) = \frac{16}{u^2+16}$. Daraus folgt, dass $dx = \frac{4du}{u^2+16}$ und $\cos(x) = \pm\frac{4}{\sqrt{u^2+16}}$ gelten. Folglich ist

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2\pm\frac{4}{\sqrt{u^2+16}}}\left(\frac{4}{u^2+16}\right)du = \int \frac{2du}{u^2+16\pm 2\sqrt{u^2+16}}.$$

Allerdings gilt $u^2+16\pm 2\sqrt{u^2+16} \neq 3+u^2$ (für fast alle u), woraus $\int \frac{dx}{2+\cos(x)} \neq \int \frac{2du}{3+u^3}$ folgt.

3. Es sei $t = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx = \int_{t(0)}^{t(\pi)} \frac{xt}{dt/dx} dt = \int_0^0 \frac{xt}{dt/dx} dt = 0,$$

da $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x \sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

√ (d) Die Substitution $t = \sin(x)$ ist mit diesen Grenzen nicht erlaubt.

Der Beweis, der mithilfe der Substitution $t = \sin(x)$ zeigt, dass $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx = 0$ gilt, ist falsch, während der andere Beweis, der mithilfe partieller Integration zeigt, dass das Integral gleich π ist, korrekt ist.

Die Substitution $t = t(x)$ kann nur dann verwendet werden, um ein endliches Integral $\int_a^b g(x)dx$ mit $a < b$ zu berechnen, wenn die Funktion t im Intervall $[a, b]$ injektiv ist. Falls t nicht injektiv ist, dann impliziert der Mittelwertsatz, dass ein $\xi \in (a, b)$ mit $t'(\xi) = 0$ existiert. Es gibt also eine Stelle im Intervall (a, b), an der $\frac{dt}{dx} = 0$ ist. Somit können wir dx nicht als $dx = f(t)dt$ anschreiben. Dies ist jedoch essentiell, um die Substitution durchzuführen.

4. Es sei $f(x) = \int_0^x \cos(\cos(t))dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) -1

(c) $\cos(\cos x)$

√ (d) $\frac{1}{\cos(1)}$

(e) $\frac{\pi}{\cos(1)}$

Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (anwendbar, da $t \mapsto \cos(\cos(t))$ stetig ist), ist f differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, und daher ist $\cos(\cos x) > 0$. Also ist f strikt monoton wachsend und deshalb injektiv auf $\mathbb{R}$ (damit existiert die inverse Funktion und ist eindeutig). Offensichtlich ist $f(0) = 0$ und daher ist $f^{-1}(0) = 0$. Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gibt

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\cos(\cos 0)} = \frac{1}{\cos(1)}.$$

5. Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}. Dann gilt $\int_c^d f^{-1}(y)dy = \ldots$

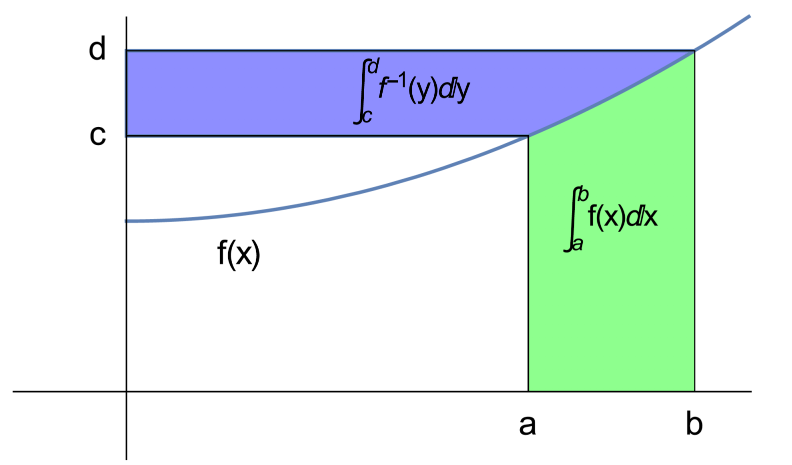
(a) $bd - ac - \int_c^d f(x)dx$

√ (b) $bd - ac - \int_a^b f(x)dx$

(c) $\frac{1}{\int_a^b f(x)dx}$

(d) $\int_a^b f(x)dx$

Da f streng monoton wachsend und surjektiv ist, gilt $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Den Graphen von f^{-1} sehen wir, wenn wir die Rollen der x- und y-Achse vertauschen. Die korrekte Beziehung lässt sich nun geometrisch einfach aus der Skizze ablesen.



Wir erhalten das Resultat auch durch substitution $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$ und anschliessender partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(y)dy &= \int_a^b x \cdot d'(x)dx \\ &= (x \cdot f(x))|_a^b - \int_a^b 1 \cdot f(x)dx \\ &= bd - ac - \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Offene Aufgaben

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u^2 = e^x - 1$);*

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u = x^2$);*

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx;$

(d) $\displaystyle\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\,dx;$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx;$

(g) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2} dx$ *(Hinweis: Das Polynom $x^2 + 1$ ist ein Faktor des Nenners.);*

(h) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4 + 2x^2} dx.$

Lösung:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$. Subst. $u^2 = e^x - 1$. Dann ist $2u\,du = e^x\,dx = (u^2 + 1)\,dx$.

$\displaystyle\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{2u\,du}{(1 + u^2)\,u} = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{e^x - 1} + C$

(b) Mit der Substitution $u = x^2$ gilt $du = 2x\,dx$, oder auch $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Daher haben wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\right) + C.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $u = x^2$ rücksubstituiert.

(c) Einsetzen der Definition von $\cosh x$ liefert

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Nun bietet sich die Substitution $u = e^x$ an, also $dx = \frac{1}{u}\,du$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cosh x} &= \int \frac{2\,du}{u\,(u + u^{-1})} = \int \frac{2\,du}{u^2 + 1} = 2\arctan u + C \\ &= 2\arctan(e^x) + C.\end{aligned}$$

Variante: Wir erweitern mit $\cosh x$ und benutzen die Identität $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2} dx = \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} dx.$$

Nun substituieren wir $u = \sinh x$, d. h. $du = \cosh x\, dx$. Also

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + D = \arctan(\sinh x) + D.$$

Diese beiden Stammfunktionen $2\arctan(e^x)$ und $\arctan(\sinh x)$ von $\frac{1}{\cosh x}$ unterscheiden sich tatsächlich nur um eine Konstante (um $\frac{\pi}{2}$), das ist aber nicht ganz einfach zu zeigen!

(d) Wir verwenden die Substituion $u = x^2$. Dann ist $du = 2xdx$, $u(3) = 9$ und $u(4) = 16$. Somit ist

$$\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_9^{16} u \cos(u) du.$$

Nun verwenden wir partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[u \sin(u)\right]_9^{16} - \frac{1}{2}\int_9^{16} \sin(u) du &= \frac{1}{2}\left(16\sin(16) - 9\sin(9)\right) + \frac{1}{2}\left[\cos(u)\right]_9^{16} \\ &= \frac{1}{2}\left(16\sin(16) - 9\sin(9) + \cos(16) - \cos(9)\right).\end{aligned}$$

(e) Im Kapitel über die Umkehrfunktion haben wir gesehen, dass $\arcsin(\sin t) = t$ gilt für $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiter gilt $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$. Diese Beziehungen können wir offenbar mit der Substitution $2x = \cos t$ ausnutzen; also gilt $2\, dx = -\sin t\, dt$. Ausserdem ist die Funktion $x(t) = \frac{1}{2}\cos t$ für $t \in [0, \pi]$ invertierbar, nämlich $t = \arccos(2x)$. Wir transformieren die Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow t = \arccos(0) = \tfrac{\pi}{2}, \quad x = \tfrac{1}{4} \Rightarrow t = \arccos(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx \\ = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} \sin t\, dt \\ = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{72}\pi^2.\end{aligned}$$

(f) Durch Ausprobieren finden wir, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist. Mit Polynomdivision ergibt sich $(x^3 + x^2 - x - 1) : (x - 1) = x^2 + 2x + 1$, was das Quadrat von $x + 1$ ist. Also faktorisieren wir $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B+2C)x + (-A-B+C)}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = \frac{1}{4}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

(g) Da x^2+1 das Nennerpolynom teilt, erhalten wir durch Polynomdivision $(x^4+2x^3+3x^2+2x+2):(x^2+1)=(x^2+2x+2)$. Die Polynome x^2+1 und x^2+2x+2 haben keine reellen Nullstellen, wir betrachten daher als Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \stackrel{!}{=} \frac{Ax+C}{x^2+1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{(A+B)x^3+(2A+C+D)x^2+(2A+B+2C)x+2C+D}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A=2$, $B=C=0$ und $D=1$. Also

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\
&= \log|x^2+1|+\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\
&= \log(x^2+1)+\arctan(x+1)+C.
\end{aligned}$$

(h) Zunächst gilt $x^4+2x^2=x^2(x^2+2)$, und x^2+2 hat keine reellen Nullstellen. Wir setzen also

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2(x^2+2)} &\stackrel{!}{=} \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2} \\
&= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+2Ax+2B}{x^2(x^2+2)},
\end{aligned}$$

woraus folgt: $A=\frac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\frac{1}{2}$ und $D=-1$. Somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2(x^2+2)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}dx-\int \frac{1}{x^2+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\log(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.
\end{aligned}$$

6. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \log(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

(a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

(b) Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

(c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\epsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\epsilon} \log(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \log(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\log(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \epsilon$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$I_0 = \int_1^e \log(x)^0 \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \mathrm{d}x = e - 1$$

und mittels partieller integration

$$I_1 = \int_1^e \log(x) \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \cdot \log(x) \mathrm{d}x = \big[x \log(x)\big]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1.$$

(b) Es sei $n \geq 2$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e \log(x) \log(x)^{n-1} \mathrm{d}x = \big[x(\log(x) - 1) \log(x)^{n-1}\big]_1^e - \int_1^e x(\log(x) - 1)(n-1) \log(x)^{n-2} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= 0 - (n-1) \int_1^e (\log(x) - 1) \log(x)^{n-2} \mathrm{d}x = (n-1)\left(I_{n-2} - I_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Also

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$$

für $n \geq 2$.

(c) Durch sukzessives Einsetzen erhält man

$$I_5 = -44e + 120.$$

(d) Mit dem Hinweis berechnen wir

$$I_n = \int_1^{e-\epsilon} \log(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \log(x)^n \mathrm{d}x \leq \int_1^{e-\epsilon} \log(e-\epsilon)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \log(e)^n \mathrm{d}x.$$

Um die Abschätzung zu zeigen, haben wir benutzt, dass log monoton steigend ist und deshalb $\log(x)^n \leq \log(e-\epsilon)^n$ für alle $x \in [1, e-\epsilon]$ und $\log(x)^n \leq \log(e)^n$ für alle $x \in [e-\epsilon, e]$. Wir haben also

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} I_n &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_1^{e-\epsilon} \log(e-\epsilon)^n + \lim_{n\to+\infty} \int_{e-\epsilon}^{e} \log(e)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \log(e-\epsilon)^n \int_1^{e-\epsilon} 1\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \log(e)^n \int_{e-\epsilon}^{e} 1\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \log(e-\epsilon)^n (e-\epsilon-1) + \lim_{n\to+\infty} 1^n \epsilon = 0 \cdot (e-\epsilon-1) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Bei der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass $\log(e-\epsilon) < 1$. Wir konnten also zeigen, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$. Und deshalb folgt, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0,$$

weil wir ja $\epsilon > 0$ beliebig klein wählen können (und $I_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$).

Bemerkung: (Zusammenhang zu fixpunktfreien Bijektionen, **nicht** prüfungsrelevant). Es gilt

$$I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$$

für alle $n \geq 0$, wobei die Folge a_n die Rekursionsgleichung $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ mit $a_0 = 1, a_1 = 1$ erfüllt. (Dies lässt sich Nachrechnen).

Es lässt sich zeigen, dass a_n genau der Anzahl fixpunktfreier Bijektionen auf einer n-punktigen Menge entspricht. Fixpunktfrei heisst, dass es keinen Punkt gibt der auf sich selbst abgebildet wird. Mehr dazu kann man auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktfreie_Permutation` nachlesen.

Es gilt also

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{a_n e}{n!} - 1 \right)$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Da eine n-punktige Menge genau $n!$ verschiedene Bijektionen zulässt, haben wir gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit zufällig eine fixpunktfreie Bijektion einer n-punktigen Menge auszuwählen für grosse n ungefähr $\frac{1}{e}$ beträgt.

7. (a) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [a,b]$.

Hinweis: Benutzten Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung oder den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

(b) Zeigen Sie, dass die Wurzelfuntkion $f : [0,1] \to [0,1], f(x) = \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Finden Sie die beste (d.h. die kleinste) Lipschitz-Konstante für die Funktion $f : [0,1] \to [0,1], f(x) := x^2$.

Lösung:

(a)

- Variante mit dem *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*: Es seien $x \leq y \in [a,b]$ gewählt. Mit dem Mittwelwertsatz der Differentialrechnung finden wir ein $\xi \in [x,y]$ mit
$$f'(\xi) \cdot (y-x) = f(y) - f(x).$$
Damit gilt
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y|.$$
Nun ist die Ableitung $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion nach Voraussetzung, also besitzt sie ein Maximum auf $[a,b]$, wir nennen es $L := \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. Für unser ξ von oben gilt offensichtlich $|f'(\xi)| \leq L$, also
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq L|x-y|.$$
Bemerkung: Die Beziehung $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ ist symmetrisch bezüglich x, y, also spielt es keine Rolle ob wir sie für $x \leq y$ oder $y \leq x$ zeigen.
- Variante mit dem *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung*: Es seien $x \leq y \in [a,b]$ gewählt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ergibt sih
$$|f(y) - f(x)| = |\int_x^y f'(t)dt| \leq \int_x^y |f'(t)|dt.$$
Wie oben nennen wir $L := \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ das Maximum der Ableitung von f auf $[a,b]$, damit erhalten wir
$$|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f'(t)|dt \leq \int_x^y L dt = L|y-x|.$$
Bemerkung: Die Beziehung $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ ist symmetrisch bezüglich x, y, also spielt es keine Rolle ob wir sie für $x \leq y$ oder $y \leq x$ zeigen.

(b) Wir nehmen zwei Punkte $x < y \in [0,1]$ und berechnen
$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Big| &= \Big|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x}\Big| = \Big|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} \cdot \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\Big| \\ &= \Big|\frac{y-x}{y-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$
Wir setzen nun $x := 0$, dann gilt
$$\Big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Big| = \Big|\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\Big| = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$
Dieser Ausdruck ist für $y \in [0,1]$ nicht beschränkt, da er für $y \to 0^+$ nach ∞ divergiert. Es gibt deshalb kein $L > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{y}} \leq L$ für alle $y \in [0,1]$, also kann die Abschätzung $|f(y) - f(x)| \leq L|x-y|$ nicht mit einem festen L erfüllt sein. Die Funktion f ist also (bei $x = 0$) nicht Lipschitz-stetig.

Bemerkung: Die Ableitung von f gibt uns Hinweise über die Lipschitz-Konstante, wir wir in (a) gezeigt haben. Hier haben wir $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, was in $x = 0$ nicht definiert ist.

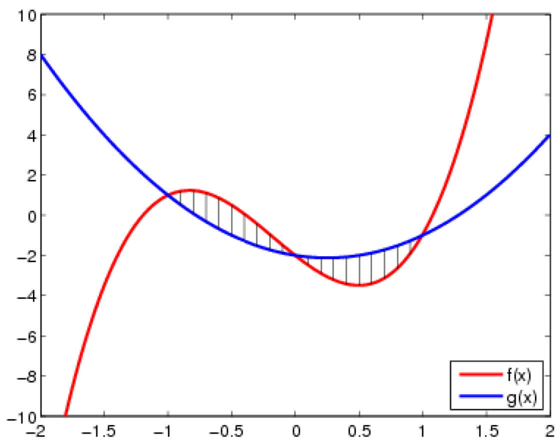
(c) Zuerst beachte, dass nach Teilaufgabe (a) ist f Lipschitz-stetig. Es gilt $f'(x) = 2x$, was auf $[0, 1]$ das Maximum $f'(1) = 2$ annimmt. Wir tippen also auf $L = 2$. Dies stimmt auch, denn für zwei Punkte $x < y \in [0, 1]$ gilt

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{y - x}\right| = |y + x| = x + y,$$

was offensichtlich den Maximalwert 2 annimmt, wenn x und y beide nach 1 streben.

8. Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$



(a) Bestimmen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))dx$.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

Lösung:

(a) Um die Schnittpunkte der beiden Graphen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen:

$$\begin{aligned} & 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 = 2x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x^3 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x - 1)(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Die gesuchte Stellen lauten also $x_1 = -1, x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

(b) $\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} 4x^3 - 4xdx = (x^4 - 2x^2)|_{-1}^{1} = -1 - (-1) = 0.$
Interpretation des Ergebnisses: Die beiden schraffierten Flächen sind gleich gross. Im Gegensatz zur linken Fläche steuert die rechte allerdings einen negativen Wert zum Integral bei, da der Graph von f zwischen x_2 und x_3 unterhalb des Graphen von g verläuft.

(c) Der Inhalt der schraffierten Fläche ist gegeben durch

$$\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|dx.$$

Wichtig hierbei die Betragsstriche. Da der Graph von f zwischen x_1 und x_2 oberhalb des Graphen von g verläuft, zwischen x_2 und x_3 jedoch unterhalb, können wir die Betragsstiche durch eine Zerlegung des Integrationsintervalls auflösen:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|dx &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} g(x) - f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} 4x^3 - 4xdx + \int_{0}^{1} 4x - 4x^3dx \\ &= (x^4 - 2x^2)|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)|_{0}^{1} = 2.\end{aligned}$$

9. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0, 1]$ derart durch eine lineare Funktion $g(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$$

minimiert wird. Bestimmen Sie den Wert von c, der diese Grösse minimiert.

Lösung: Das Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx &= \int_0^1 \big(\sqrt{x} - x - c\big)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 \Big(x - 2x^{3/2} - 2cx^{1/2} + x^2 + 2cx + c^2\Big) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}cx^{3/2} + \frac{x^3}{3} + cx^2 + c^2x\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Also müssen wir die Funktion $h(c) = c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}$ minimieren. Deren Ableitung ist $h'(c) = 2c - \frac{1}{3}$, und diese ist Null, wenn $c = \frac{1}{6}$. An dieser Stelle findet man tatsächlich ein Minimum der Funktion h, denn $h'' = 2 > 0$.

Insgesamt ist also $g(x) = x + \frac{1}{6}$ die beste lineare Approximation der Funktion $\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ im *quadratischen Mittel*, und der Fehler ist $h(\frac{1}{6}) = \frac{1}{180}$.

10. Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x \mapsto \int_0^{\sin x} f(t)\, dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.

Lösung: Wir setzen $G(x) := \int_0^x f(t)\, dt$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung $G'(x) = f(x)$. Die Funktion F ist definiert durch $F(x) = G(\sin x)$. Also gilt:

$$F'(x) = G'(\sin x) \cos x = f(\sin x) \cos x.$$