Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 1

Abgabetermin Mittwoch, 30.09.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Welche der Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

2. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist eine Nullfolge.

(d) Die Folge ist konvergent.

(e) Der Limes der Folge ist 1.

3. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

(a) $\frac{1}{5}$.

(b) 0.

(c) ∞.

(d) $\frac{1}{32}$.

(e) $-\frac{1}{21}$.

4. Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots$$

ist gleich ...

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{2}{3}$.

(c) 2.

(d) $\frac{3}{2}$.

(e) ∞.

5. Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

(a) $a_n = \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(c) $a_n = \frac{1}{1} + \ldots \frac{1}{n}$.

(d) $a_n = 1 + \ldots + n$.

Offene Aufgaben

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

(a) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

(b) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$

(c) $\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

(d) Für $a \neq 8$: $\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4)$

(e) Für $a, b \neq 0$: $\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab)$

(f) Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$?

(g) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$?

7. Gegeben sei die Funktion

$$f : x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f. Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbreich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

8. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja: was ist ihr Grenzwert?

(a) $a_n = \cos\frac{\pi n}{3}$.

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$.

(c) $a_n = \frac{3n^4-5n^2+2}{7n^4-4n^3}$.

(d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$.

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$.

9. Fibonacci-Folge: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen.

(a) Begründen Sie, wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.

(b) Es sei

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

(c) Begründen Sie, dass $c_n = (-1)^{n+1}$ gilt.

(d) Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}), wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}), wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.

(e) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.