D-MAVT/D-MATL — Analysis I — HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas

Prof. Dr. Urs Lang

Serie 10

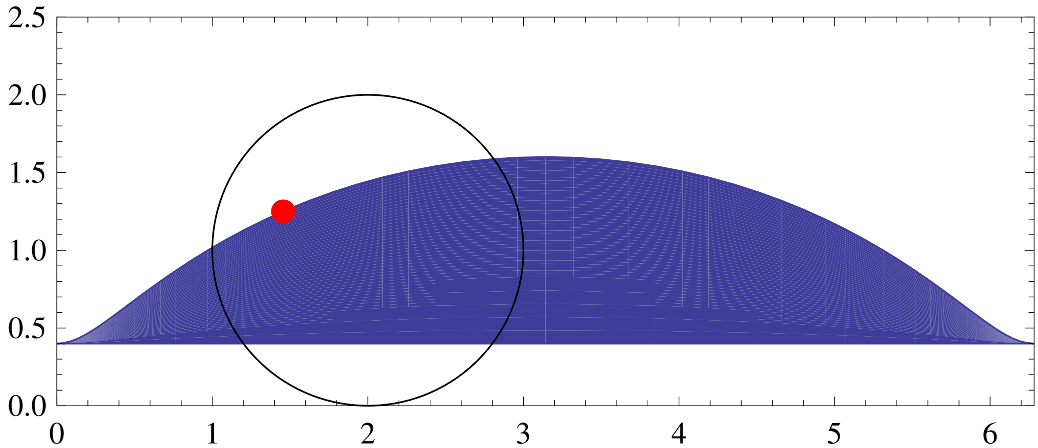
Abgabetermin Mittwoch, 02.12.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

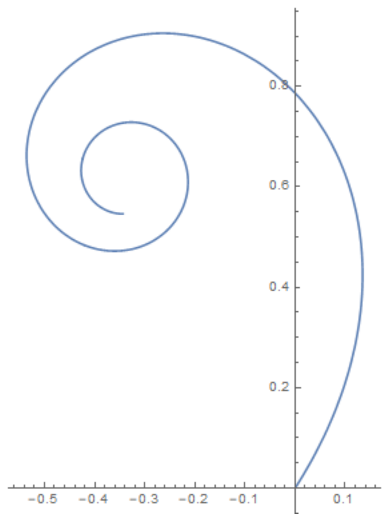
(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

(d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u,\, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right),$$

wobei $t \in [1, 4\pi)$.



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

(c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\ln(\pi)$

3. Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\rho(\varphi) = 2a(1 + \cos\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$?

(a) $8a$

(b) $8\sqrt{2}a$

(c) $16a$

(d) $16\sqrt{2}a$

(e) $32a$

4. Eine geschlossene Kurve $[0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve

(b) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(c) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(d) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

(e) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

(f) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

5. Berechnen Sie die Bogenlänge L der Spirale, die gegeben ist durch

$$\vec{r} : [0, T] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto e^{-t}(\cos t, \sin t),$$

wobei $T \to +\infty$.

(a) $L = \infty$

(b) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $L = \frac{1}{2}$

(d) $L = \sqrt{2}$

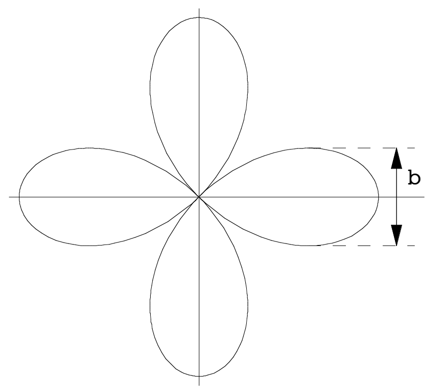
(e) $L = 2$

Offene Aufgaben

6. Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

(b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

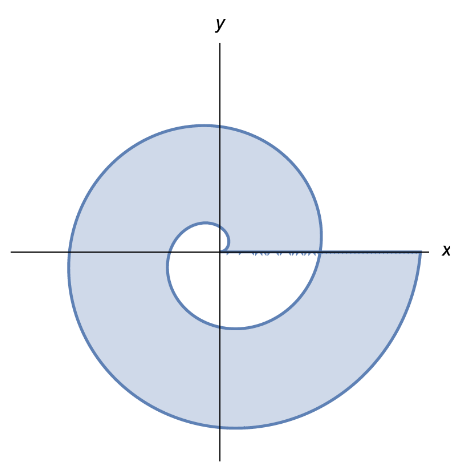
7. Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

(a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

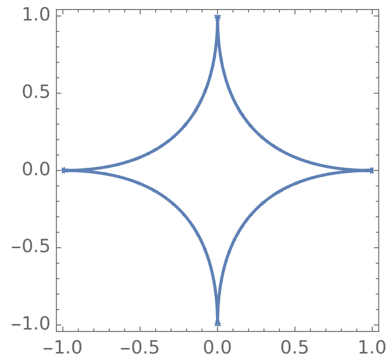
(b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

(c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$

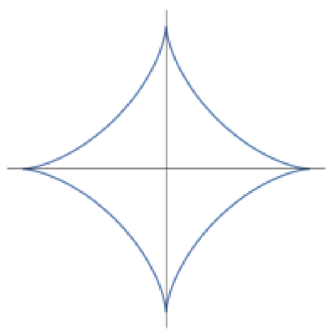
8. Es sei die Spirale $\rho(\varphi) = \varphi$ in Polarkoordinaten gegeben. Berechnen Sie den Inhalt des schattierten Flächenstückes, das eingeschlossen wird von der x-Achse und den Stücken der Kurve mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$.



9. Berechnen Sie die Fläche F des durch die ebene Kurve $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} = 1$ begrenzten Bereichs.
Hinweis: Eine im ersten Quadranten gültige Parametrisierung der Kurve ist durch $t \mapsto (\cos^4(t), \sin^4(t))$ mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Verwenden Sie Symmetrien!



10. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a:

(a) die Bogenlänge der Astroide;
(b) die Fläche des Astroidensterns;
(c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird.

Erinnerung: (für Teilaufgabe b)) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Es wurde auch die folgende Formel gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$