D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 11

Abgabetermin Mittwoch, 09.12.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht.

(a) $2\pi(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$

(b) $2\pi(\log(1+\sqrt{2})+2)$

(c) 0

(d) $\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$

2. Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

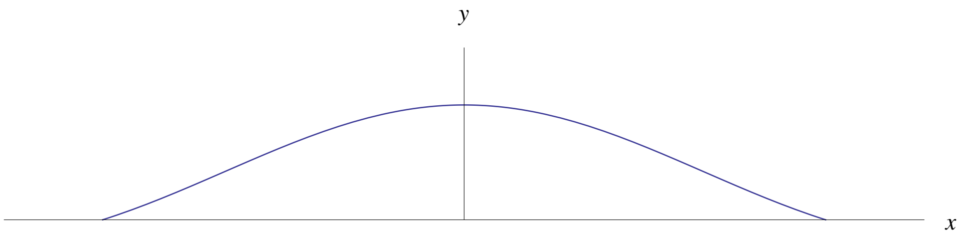
(b) 3.664

(c) 84.792

3. Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

(d) 4π

4. Liegt der Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers immer auf dessen Rotationsachse?

(a) Nein. Dies würde im Umkehrschluss bedeuten, dass sich alle Rotationsachsen eines Körpers in einem Punkt schneiden müssten, was nicht immer der Fall ist.

(b) Ja. Andernfalls würde der Schwerpunkt nach der Rotation nicht mehr derselbe sein – er ist aber eindeutig.

5. Es sei B_α (für $0 < \alpha < 1$) die von den beiden Parabelbögen $x - y^2 = 0$ und $x - \alpha\, y^2 = 1$ berandete Fläche. Für welche α liegt der Schwerpunkt von B_α ausserhalb der Fläche B_α?

(a) $\alpha < \frac{2}{3}$

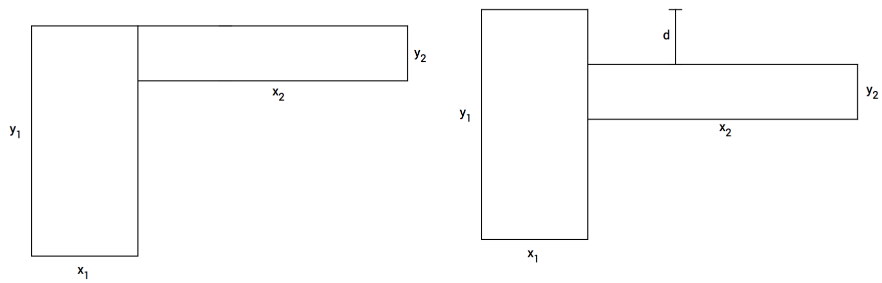
(b) $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

(c) $\alpha < \frac{3}{4}$

(d) $\frac{3}{4} < \alpha < 1$

(e) $\alpha < 1$

6. Betrachten Sie die folgenden Figuren, die beide aus den selben zwei homogenen Rechtecken zusammengesetzt sind und sich nur in der Platzierung des rechten (liegenden) Rechtecks unterscheiden (dieses ist um d nach unten versetzt):



Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$. Welche Aussagen über die Schwerpunkte S_1 (der linken Figur) und S_2 (der rechten Figur) sind wahr?

(a) Die x-Koordinaten von S_1 und S_2 stimmen überein.

(b) Die Länge (bedeutet Ausdehnung in x-Richtung) des rechten (liegenden) Rechtecks kann so gewählt werden, dass die y-Koordinaten von S_1 und S_2 übereinstimmen.

(c) Die Differenz der y-Koordinaten von S_1 und S_2 beträgt d.

Offene Aufgaben

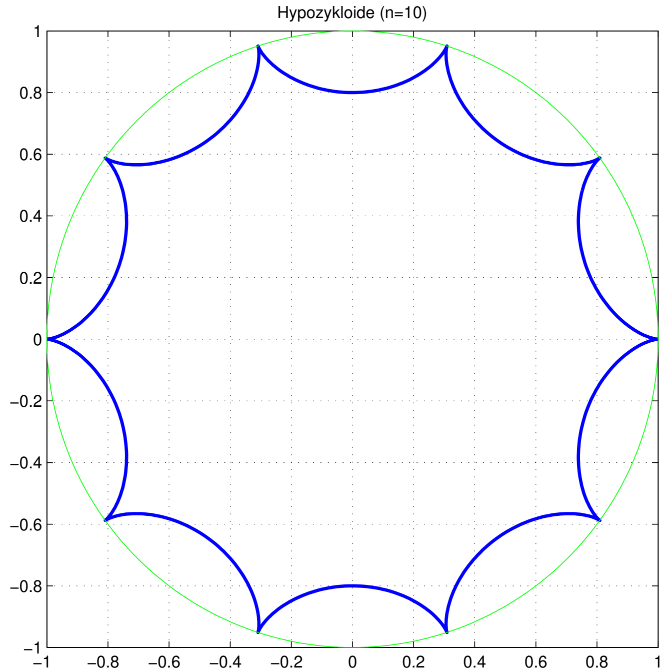
7. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$

$$x(\phi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\phi + \cos((n-1)\phi)),$$
$$y(\phi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\phi - \sin((n-1)\phi))$$

beschrieben wird.

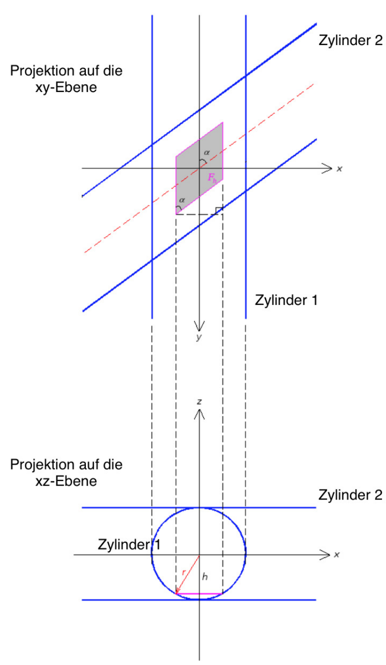
(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

(b) Für welche n ist diese Fläche grösser als 2/3 der Fläche des grossen Kreises?



8. Zwei gerade Kreiszylinder Z_1 und Z_2 mit gleichem Grundkreisradius r durchdringen einander derart, dass sich ihre Achsen schneiden und den Winkel α einschliessen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $Z_1 \cap Z_2$.

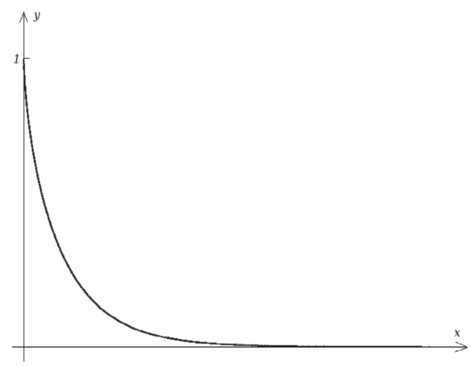
Hinweis: Zerschneiden Sie den Körper durch Ebenen, welche zu beiden Achsen parallel sind.



9. Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}}\, \mathrm{d}u,\, e^{-s} \right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



(a) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T.

(b) Bestimmen Sie das Volumen des von dieser Rotationsfläche und den zwei Kreisscheiben

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

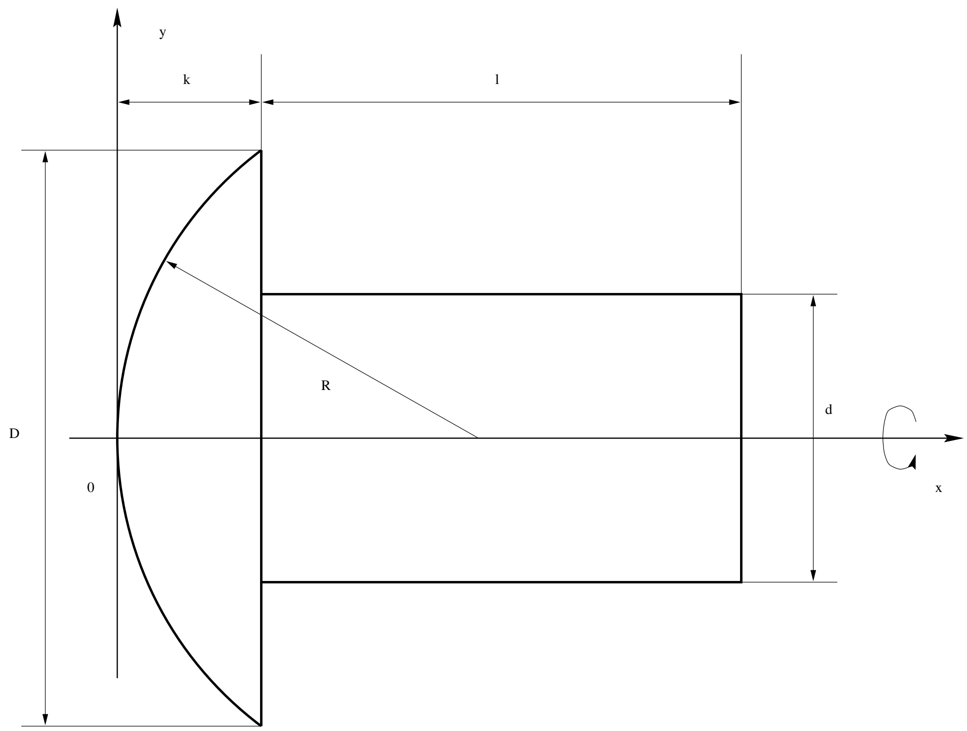
bzw.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(T), y^2 + z^2 \leq e^{-T}\}$$

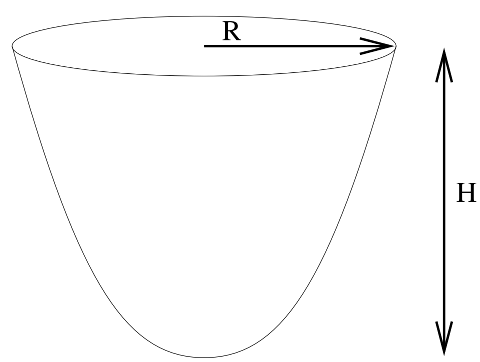
begrenzten Körpers, in Abhängigkeit von T.

(c) Was passiert, wenn T gegen unendlich strebt?

10. (a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des in der Figur dargestellten homogenen Halbrundniets. Es sind $d = 16$mm, $D = 28$mm, $k = 11.5$mm und $l = 80$mm.



(b) Betrachten Sie das Rotationsparaboloid, das durch Rotation der Kurve $z = ax^2$ um die z-Achse gegeben ist:



Auf welcher Höhe liegt der Körperschwerpunkt?

11. (a) Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s, Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie der Platte?

(b) Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \qquad (\text{für } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger, homogener Körper mit homogener Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.