D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 12

Abgabetermin Mittwoch, 16.12.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

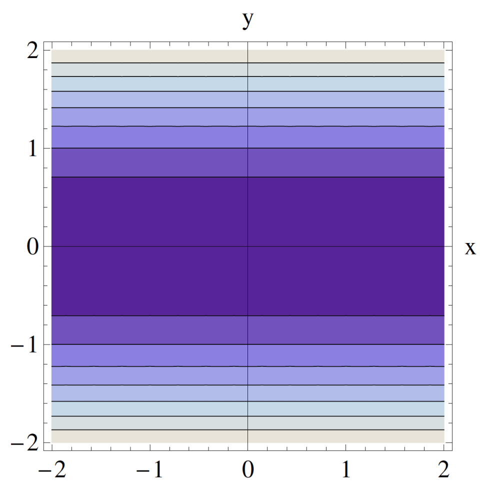
1. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x$$

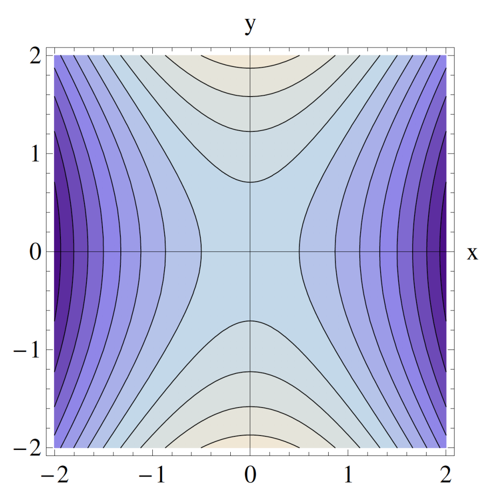
(a) konvergiert.

(b) divergiert.

2. Welche Niveaulinien passen zur Funktion $f(x,y) = y^2$?

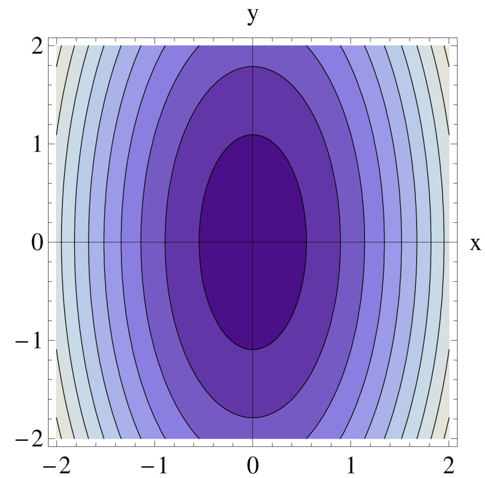


(a)

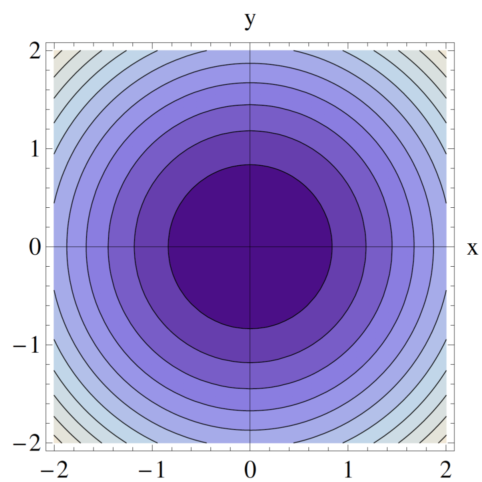


(b)

3. Welche Niveaulinien passen zur Funktion $f(x, y) = 4x^2 + y^2$?



(a)



(b)

4. Für welche der folgenden Funktionen f ist

$$f_x(x, y) = e^{4x} + 2xy^2,$$

$$f_y(x, y) = \cos y + 2x^2 y?$$

(a) $(x, y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y + \pi$.

(b) $(x, y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + v(y)$, wobei $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist.

(c) $(x, y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin(\pi - y)$.

(d) Keine Option ist richtig.

5. Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

(a) die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

(b) die Produkte von zwei linearen Funktionen.

(c) die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

(d) die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

6. Welcher der folgenden Vektoren steht senkrecht auf der Kurve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ an der Stelle $(1, 1)$?

(a) $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$.

(b) $\vec{v} = (-1, -1)$.

(c) $\vec{v} = (1, -1)$.

(d) $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$.

Offene Aufgaben

7. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx;$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,dx;$ *Hinweis:* Partialbruchzerlegung.

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}};$

(d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x};$

(e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2};$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda^2+x^2}\,dx$, wobei $\lambda > 0$.

(g) Finden Sie den Wert der Konstante K, für welchen das Integral

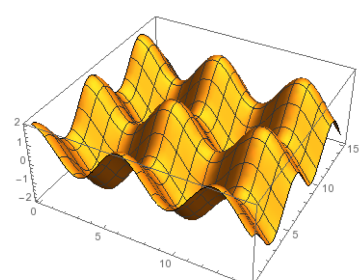
$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{K}{x+2}\right) dx$$

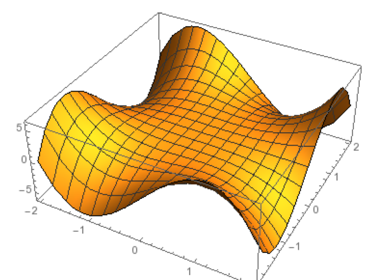
konvergiert und berechnen Sie in diesem Fall das Integral.
Hinweis: Benützen Sie die Identität $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

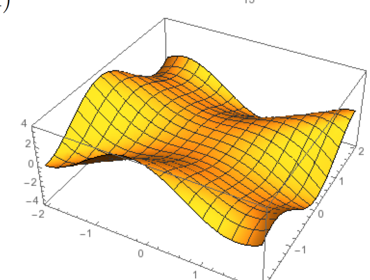
8. Wir betrachten die folgende Liste von Funktionen

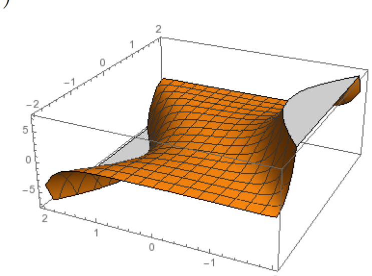
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(x-y)(-x^2+y^2)\\
g(x,y) &= (x-y)e^{-x^2+y^2}\\
h(x,y) &= \cos(x)+\cos(y)\\
l(x,y) &= (x^2-y^2)xy.
\end{aligned}$$

(a) Ordnen Sie diese Funktionen den Graphen A)-D) zu.

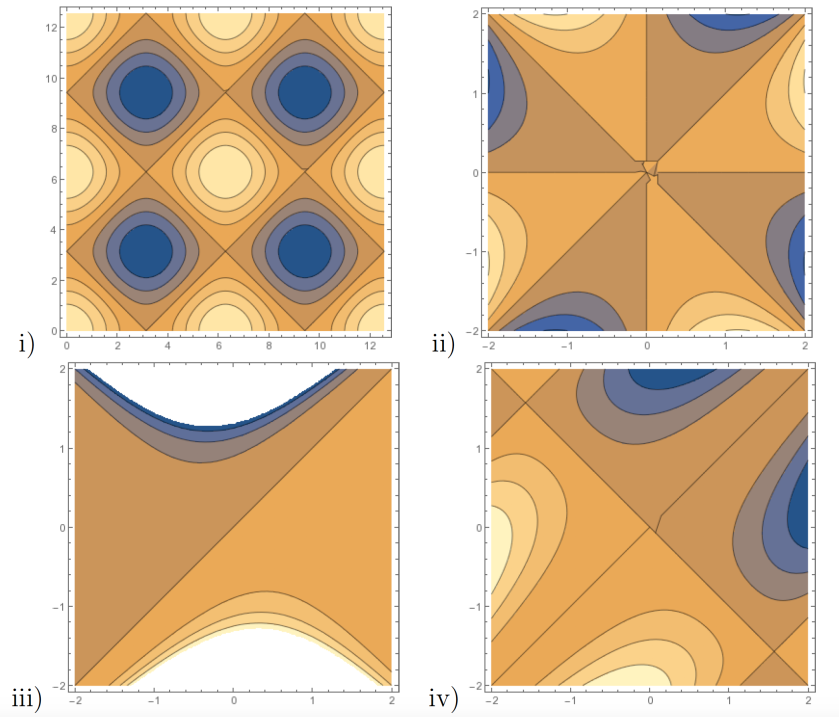

A)


B)


C)


D)

(b) Ordnen Sie diese Funktionen den Niveaulinien i)-iv) zu.



9. Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f(x, y) = x$

(b) $f(x, y) = e^{xy}$

(c) $f(x, y) = x^y$

(d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

(e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$

10. Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedinung für die folgenden Funktionen $\varphi(x, y), \psi(x, y)$. Finden Sie, falls möglich, eine Funktion $f(x, y)$ (mit einem achsenparallelen Rechteck als Definitionsbereich) mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$.

(a) $\varphi(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \psi(x, y) = -\frac{x}{y^2}$.

(b) $\varphi(x, y) = e^x \cos y, \quad \psi(x, y) = e^x \sin y$.

(c) $\varphi(x, y) = x \arctan y, \quad \psi(x, y) = \frac{x^2}{2(1+y^2)} + \log y$.

(d) $\varphi(x, y) = \frac{2+2y}{x^2+y^2}, \quad \psi(x, y) = -\frac{2x-y}{x^2+y^2}$.

11. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 y$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad}(f)$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $(3, 2)$ in Richtung $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

(c) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f an der Stelle $(3, 2)$ am grössten? Berechnen Sie die Richtungsableitung in dieser Richtung.