Serie 2

Abgabetermin Mittwoch, 7.10.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Funktionen $(-1,1) \to \mathbb{R}$ sind strikt monoton wachsend?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

(d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^4-1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}, \\ a & \text{für } x \in \{-1,\ 1\}. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig an der Stelle 1?

(a) Für jedes a.

(b) $a = 1$

(c) $a = \frac{1}{4}$

(d) $a = 4$

(e) Ein solches a gibt es nicht.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x+1} & x > 1 \end{cases}.$$

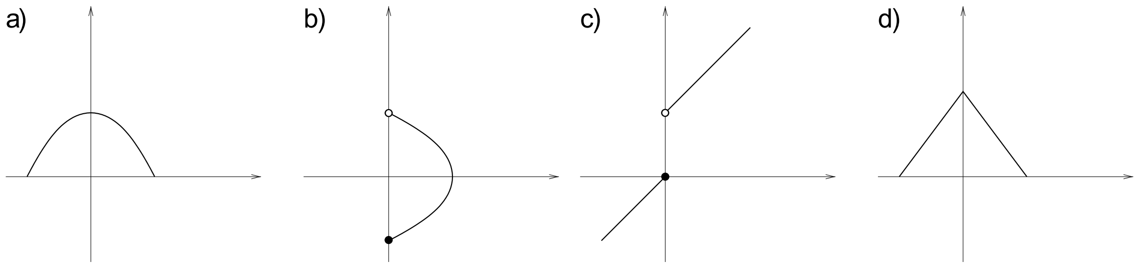
Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist stetig.

(b) f ist stetig in 0.

(c) f ist stetig in 1.

4. Welche der folgenden Bilder sind Graphen von Funktionen?



(a) Bild a).

(b) Bild b).

(c) Bild c).

(d) Bild d).

5. Welche Funktionen sind konstant?

(a) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

(b) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(c) $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$.

(d) $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

Offene Aufgaben

6. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.[1]

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos(\pi/x)}\right)^2 \sin(2\pi/x)$

7. Ausgehend von der Funktion f_1 zeichnen Sie in einem Koordinatensystem mit der Einheit *2cm* die Graphen der Funktionen f_1 bis f_6. Beschreiben Sie auch in Worten, wie die Graphen von f_2 bis f_6 aus f_1 hervorgehen.

(a) $f_1\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (b) $f_2\colon x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$ (c) $f_3\colon x \mapsto \frac{8}{4+x^2}$

(d) $f_4\colon x \mapsto \frac{1}{2-2x+x^2}$ (e) $f_5\colon x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ (f) $f_6\colon x \mapsto \frac{1}{4}(x^2+4)$

8. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \text{ kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

Beschreiben Sie f durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f stetig? Gibt es ein x mit $f(x) = -\pi$? (Sie müssen x dazu nicht berechnen!)

9. Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2+y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x-Achse mit derselben x-Koordinate wie A. Es bezeichne ABC des Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A, wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(a) Skizzieren Sie das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wieso gilt somit

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$? (*Bemerkung*: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen *sin* und *cos* in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

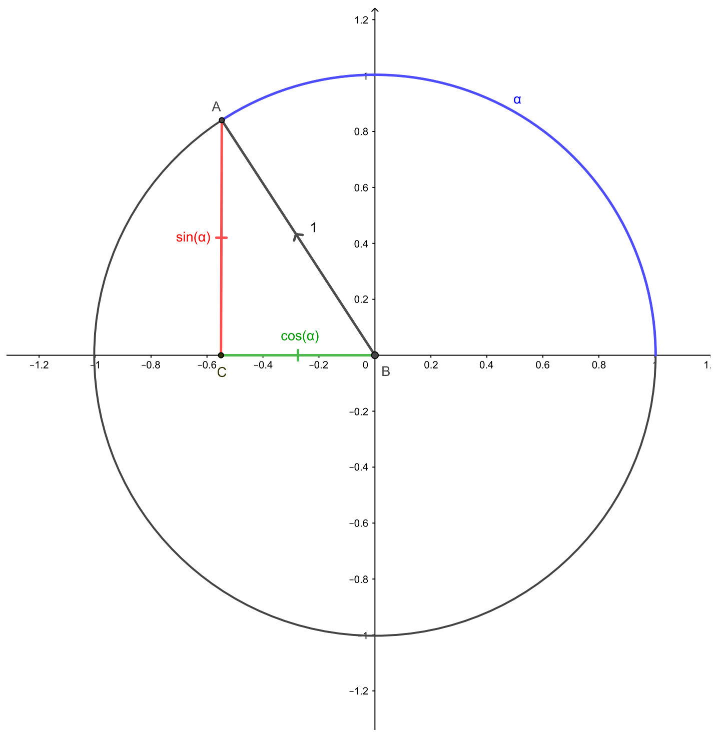
für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (*Bemerkung*: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

[1] Falls Sie die Regel von Bernoulli-l'Hôpital schon kennen, versuchen Sie bitte dennoch diese Grenzwerte *ohne* diese Regel zu berechnen.

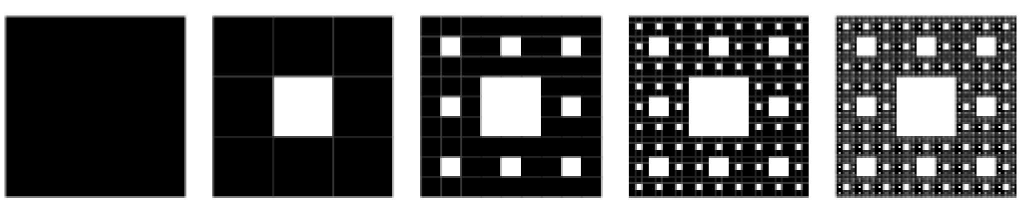
(d) Es sei arctan die Umkehrfunktion von tan. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC. (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).



10. Zusatzaufgabe zum Thema Folgen: Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 werden sukzessive kleinere Quadrate ausgeschnitten, wie unten abgebildet. Die Seitenlängen der im Folgeschritt ausgeschnittenen Quadrate beträgt stets ein Drittel der vorhergehenden Seitenlänge. Wie gross ist der Flächeninhalt des im Grenzwert entstehenden Fraktals?



Diese Konstruktion führt zum sogenannten Menger-Schwamm, der weitere faszinierende Eigenschaften hat: https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm.