D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 3

Abgabetermin Mittwoch, 14.10.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus ln zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

(e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \big[0, \sqrt{1/2}\big] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \big[0, \sqrt{1/2}\big],\ x \mapsto f(x)$.

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gelte ausserdem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

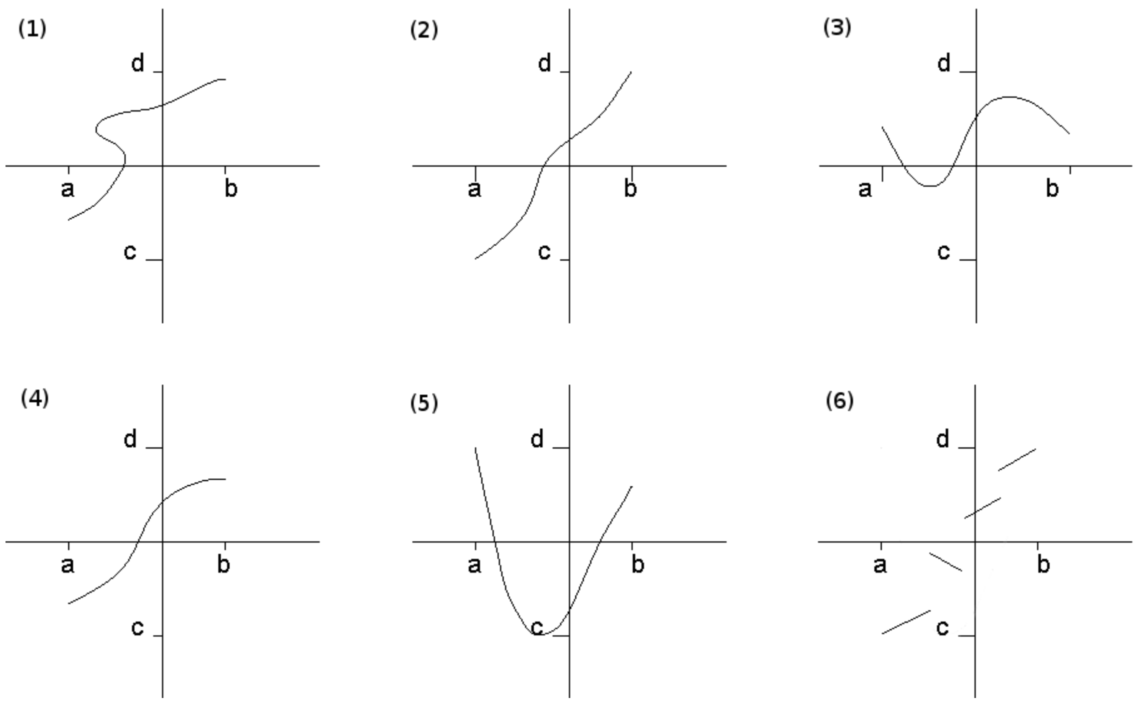
Welche Aussage ist richtig?

(a) Dann ist g sicher eine Asymptote von f wenn $x \to +\infty$.

(b) g kann eine Asymptote von f sein wenn $x \to +\infty$, muss aber nicht.

(c) Dann ist g sicher keine Asymptote von f wenn $x \to +\infty$.

4. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

(b) (2)

(c) (3)

(d) (4)

(e) (5)

(f) (6)

5. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

(c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

6. Es sei $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^3+1}$. Welche Aussage ist richtig?

(a) $f'(x) = \frac{-36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

(b) $f'(x) = \frac{9x^2}{(1+2x^3)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^4}$

(d) $f'(x) = \frac{72x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

Offene Aufgaben

7. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto 2x-6 \\ f_2 &\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), && x \mapsto |x| \\ f_3 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \min\{x^2-9, 0\} \\ f_4 &\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \tfrac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

(a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5,5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hierzu nicht explizit berechnen.

8. (a) Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D(f) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Bestimmen Sie die inverse Funktion von f.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan\big(\pi\big(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x)\big)\big) = a.$$

9. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

(a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

(b) $g(t) = \sqrt{4t^2+3}$;

(c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

(d) $i(t) = \ln(1+e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

10. Berechnen Sie $f' \colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$;

c) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sin x}$;

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$;

e) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\tan x)^2$;

f) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\ln x}$;

g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$;

h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h)** im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist.