D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas

Prof. Dr. Urs Lang

Serie 4

Abgabetermin Mittwoch, 21.10.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x = 6$?

(a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

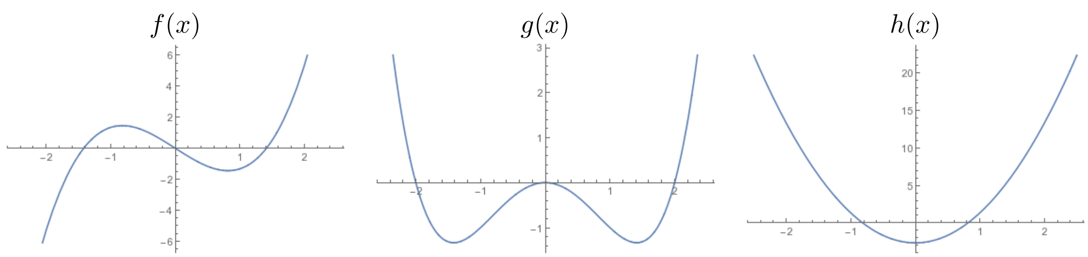
(b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(d) $y = x - 4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

2. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f' = g$

(b) $g' = f$

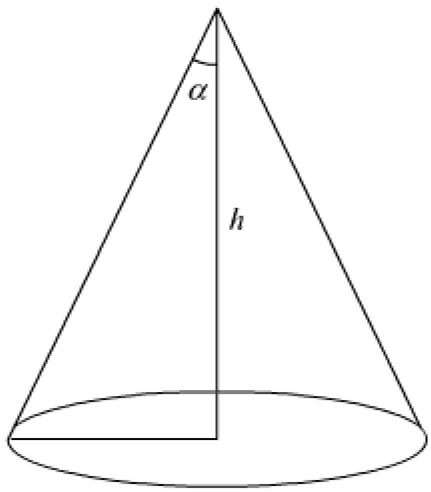
(c) $f' = h$

(d) $h' = g$

(e) $g'' = h$

(f) $f'' = g$

3. In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei Berechnung des Volumens $V(\alpha)$ des Kegels aus?



(a) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\tan(\alpha)\Delta\alpha$.

(b) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha$.

(c) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ hängt von h ab.

(d) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ ist proportional zu $\frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

4. Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x \ln x$.

5. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *richtig*?

(a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

(b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

(c) Ist $f' > 0$ auf (a,b), so ist f streng monoton wachsend.

(d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a,b).

6. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es seien $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

(a) f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(b) f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(c) f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(d) f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a,b]$.

Offene Aufgaben

7. Beweisen Sie die folgende Formeln per Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \geq 1$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \geq 1$.

8. Es sei x eine kleine Grösse. Finden Sie *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1$

(b) $f_2(x) = e^{1+x}$

(c) $f_3(x) = (1000 - x)^{\frac{1}{3}}$

(d) $f_4(x) = \prod\limits_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365}\right)$.

9. Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues, unbekanntes Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach 10 Sekunden mit einem Messfehler von ¡ 0.1 Sekunden, also

$$m(10 + \Delta t) = 1, \qquad |\Delta t| < 0.1$$

(a) Bestimmen Sie den relativen Messfehler der Zeitmessung: $\frac{\Delta t}{t}$.

(b) Bestimmen Sie α unter der Annahme einer perfekten Zeitmessung, d.h. $\Delta t = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t^2}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass der relative Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

(e) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

10. (a) Es sei eine stetige, in (a,b) differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

(b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1,1]$.

(c) Wenn die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.