D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 5

Abgabetermin Mittwoch, 28.10.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

2. Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. Sei

$$\begin{aligned} f\colon [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

(c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

4. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

(a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

(c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

(d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

Offene Aufgaben

5. Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-4x}-1}{2x^2-8x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4)-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x\ln^2(x)}$

6. (a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

7. Die Hyperbolische Funktionen sinh und cosh sind wie folgt definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

(c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1$.

8. Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$?

(a) $g(x) = e^{x+4}$;

(b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

(c) $g(x) = e^{x^2}$;

(d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

(e) $g(x) = x^x$.