D-MAVT/D-MATL
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis I

HS 2020

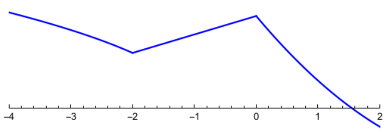
Serie 6

Abgabetermin Mittwoch, 04.11.2020 um 12:00 Uhr.

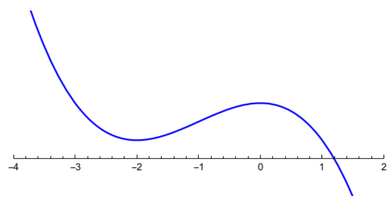
MC-Aufgaben

1. Gegeben sind die folgende Funktionen:

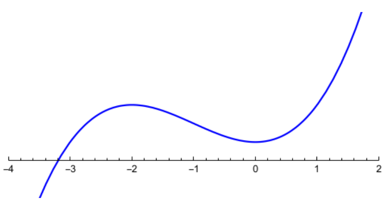
a)



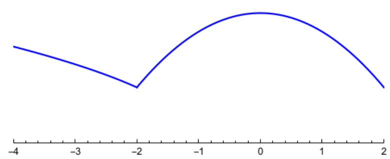
b)



c)



d)



Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

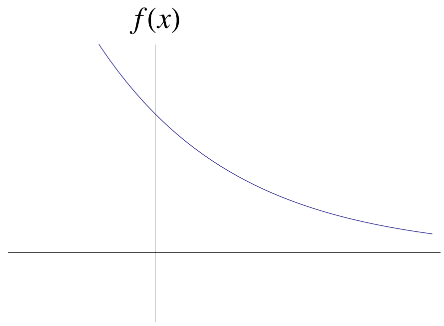
(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

(b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit verschwindender Ableitung.

(d) Die Funktion c) ist konvex.

2. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

(b) Die erste Ableitung f' ist negativ

(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

(d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

3. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

(a) Ein Kreis.

(b) Eine Ellipse.

(c) Eine Parabel.

(d) Eine Gerade.

(e) Ein anderes Objekt.

(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

4. Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit der Parametrisierung

$$\left[0, \tfrac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix}.$$

(a) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2,zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.

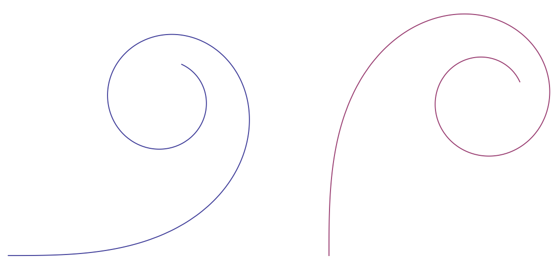
(b) Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.

(c) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

(d) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

(e) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

5. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



(a) k_1 ist positiv

(b) k_2 ist negativ

(c) $t \to k_1(t)$ ist monoton wachsend

(d) $t \to k_2(t)$ ist monoton fallend

Offene Aufgaben

6. Gegeben sei die reelle Funktion

$$f : x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

(b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

(d) Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

(e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

7. Ein Kreis vom Radius r rollt im Innern eines Kreises vom Radius R ab ($r < R$). Die Kurve, die dabei ein fester Punkt P der Peripherie des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*. Bestimmen Sie für den Fall $R = 4r$ eine Parameterdarstellung sowie eine implizite Darstellung der Kurve und skizzieren Sie diese.

8. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}\,, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von C.
Hinweis: Was ist $\frac{y}{x}$?

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

(c) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen ?

9. Die Ebene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

(b) Berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ sowie die Parametrisierung der Evolute.

(c) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in (a) gelisteten Eigenschaften.