D-MAVT/D-MATL — Analysis I — HS 2020

Prof. Dr. Ana Cannas

Prof. Dr. Urs Lang

Serie 7

Abgabetermin Mittwoch, 11.11.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Die beiden in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Kurven

$$\begin{array}{lcrcl} K_1 & : & r & = & \sin^2 \varphi \\ K_2 & : & r & = & \frac{1}{2}|\sin(2\varphi)| \end{array}$$

schneiden sich für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt P an die Kurve K_1. Welcher der folgenden Punkte liegt nicht auf t_1?

(a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\left(1, \frac{6-\sqrt{2}}{2}\right)$

(e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

2. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

(b) falsch

3. Es seien $C, l \in (0, +\infty)$. Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\rho = Ce^{l\phi},$$

wobei $\phi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\phi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\phi)$ ist konstant.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

4. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

(e) Keines von diesen.

5. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

6. Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

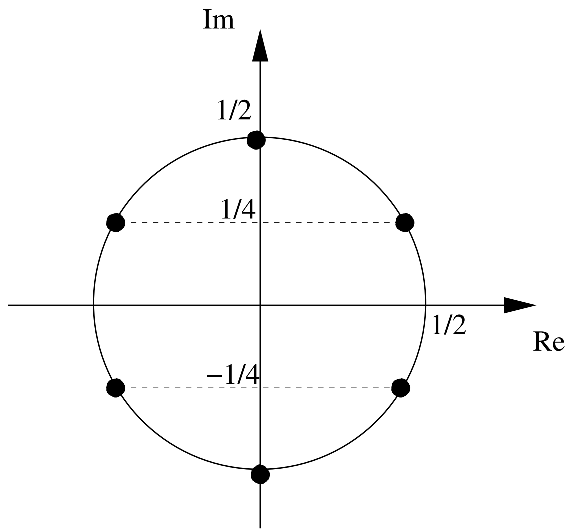
(b) -2^{1000}

(c) $(2i)^{1000}$

(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

(e) 2^{2000}

7. Alle schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen Lösungen der Gleichung ...



(a) $z^8 = \frac{1}{256}$

(b) $z^6 = \frac{1}{64}$

(c) $z^6 = \frac{1}{2}$

(d) $z^6 = -\frac{1}{64}$

Offene Aufgaben

8. Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

(b) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

9. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma} \colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

(b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

10. Finden Sie in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Geben Sie die Lösungen jeweils auch in Polarform an.

(a) $z^6 = -8$

(b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

(c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

11. (a) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w + z| < C$.

(b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

[1] Falls Sie r_0 bei (a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.