D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 8

Abgabetermin Mittwoch, 18.11.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z \cdot i) > \operatorname{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < -\operatorname{Im}(z)\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z \cdot i) > \operatorname{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > \operatorname{Re}(z)\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 0\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(-z) - \operatorname{Im}(-z) > 0\}$

2. Sei $n \geq 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(a) Wahr

(b) Falsch

3. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

(a) 0

(b) $\frac{-i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

(b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

(d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

5. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t\,dt$

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$

(c) $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$

6. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

(d) $f'(x) = \sin(x)$.

Offene Aufgaben

7. Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p.

(a) Was sind r_p, c_p für $p(x) := x^5 + 1$?

(b) Begründen Sie wieso immer gilt $r_p + c_p = 5$.

(c) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?

(d) Finden Sie alle möglichen Werte von r_p. Geben Sie weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.

8. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1 - 3i)z^3 - 2 - 2i = 0.$$

9. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u+v}.$$

Hinweis: Substituieren Sie $z = \frac{v}{u}$.

10. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

(b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

(c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

11. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \left(x^2 + 1\right)^2 \, dx$

(b) $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx$

(c) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

12. Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b, a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.