D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2020
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 9

Abgabetermin Mittwoch, 25.11.2020 um 12:00 Uhr.

MC-Aufgaben

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$

2. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1$.

(b) $u = 2 + \cos(x)$.

(c) $u = \tan(x/2)$.

(d) $u = 4\tan(x)$.

3. Es sei $t = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_{t(0)}^{t(\pi)} \frac{xt}{dt/dx}dt = \int_0^0 \frac{xt}{dt/dx}dt = 0,$$

da $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

(d) Die Substitution $t = \sin(x)$ ist mit diesen Grenzen nicht erlaubt.

4. Es sei $f(x) = \int_0^x \cos(\cos(t))dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) -1

(c) $\cos(\cos x)$

(d) $\frac{1}{\cos(1)}$

(e) $\frac{\pi}{\cos(1)}$

5. Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}. Dann gilt $\int_c^d f^{-1}(y)dy = \ldots$

(a) $bd - ac - \int_c^d f(x)dx$

(b) $bd - ac - \int_a^b f(x)dx$

(c) $\frac{1}{\int_a^b f(x)dx}$

(d) $\int_a^b f(x)dx$

Offene Aufgaben

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u^2 = e^x - 1$);*

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u = x^2$);*

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx;$

(d) $\displaystyle\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1 - 4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\,dx;$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx;$

(g) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2} dx$ *(Hinweis: Das Polynom $x^2 + 1$ ist ein Faktor des Nenners.);*

(h) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^4 + 2x^2} dx.$

6. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \log(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

(a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

(b) Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

(c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\epsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\epsilon} \log(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^{e} \log(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\log(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq \epsilon$.

7. (a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$.

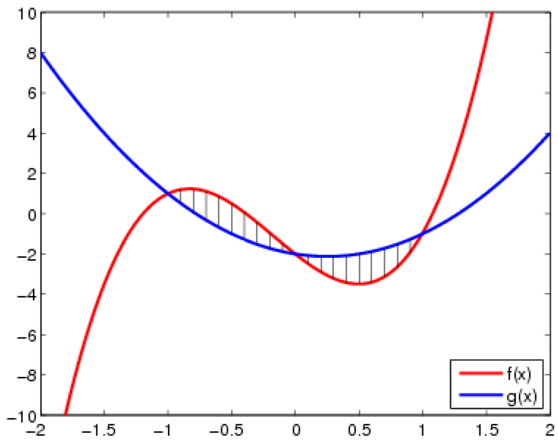
Hinweis: Benutzten Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung oder den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

(b) Zeigen Sie, dass die Wurzelfuntkion $f : [0, 1] \to [0, 1], f(x) = \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Finden Sie die beste (d.h. die kleinste) Lipschitz-Konstante für die Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1], f(x) := x^2$.

8. Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$



(a) Bestimmen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))dx$.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

9. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0, 1]$ derart durch eine lineare Funktion $g(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$$

minimiert wird. Bestimmen Sie den Wert von c, der diese Grösse minimiert.

10. Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x \mapsto \int_0^{\sin x} f(t)\, dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.