Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Ergänzungen zu Kapitel 0 im Fischer

Menny Akka Ginosar

29. September 2020

0.4.4

Wir erinnern an die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^k &\to \text{Lös}(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n \\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &\mapsto (x_1(\lambda), \ldots, x_r(\lambda), \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \end{aligned}$$

in Kapitel 0.4.4 von Fischer [1]. Wir führen hier einen formalen Beweis, dass die Abbildung Φ eine Bijektion ist.

Φ ist <u>injektiv</u>: Falls $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k) = \lambda'$ ist, dann ist auch

$$(x_1(\lambda), \ldots, x_r(\lambda), \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (x_1(\lambda'), \ldots, x_r(\lambda'), \lambda'_1, \ldots, \lambda'_k)$$

oder in anderen Worten $\Phi(\lambda) \neq \Phi(\lambda')$.

Φ ist <u>surjektiv</u>: Sei $y = (y_1, \ldots, y_n)$ eine Lösung und $\lambda = (y_{n-k+1}, \ldots, y_n)$ der Vektor der k letzten Komponenten von y. Dann sind $\Phi(\lambda)$ und y zwei Lösungen, deren letzte k Koordinaten übereinstimmen. Wir haben aber gesehen, dass für Lösungen von $(A|b)$ die ersten r Koordinaten durch die letzten k Koordinaten bestimmt sind. Daher gilt $y = \Phi(\lambda)$ und insbesondere ist Φ surjektiv.

Bemerkung 0.1. Diese Erklärung finden Sie auch in Abschnitt 0.4.8 in Fischer [1].

0.4.5

Wir überspringen diesen kurzen Abschnitt im Moment.

0.4.6

<u>Zeilenoperationen</u>: Sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Wir benutzen **drei**[1] Arten von sogenannten *elementaren Zeilenumformungen* auf $(A|b)$:

I Vertauschen von zwei Zeilen. $(L_i \leftrightarrow L_j)$

II Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur k-Zeile, wobei[2] $\lambda \in \mathbb{R}$ und $i \neq k$. $(L_k + \lambda L_i \to L_k)$

III Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda \cdot L_i \to L_i)$

Hier bezeichnen L_i die Zeilen von $(A|b)$.

[1] Fischer [1] benutzt nur zwei!

[2] $\lambda \neq 0$ wie in Fischer [1] ist nicht nötig.

Satz 0.2 (Erweiterte Version des Satzes in Fischer [1, Seite 26]). *Sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Angenommen $(\tilde{A}, \tilde{b})$ wurde aus (A, b) durch endlich viele elementare Zeilenumformungen erhalten. Dann haben die Systeme $Ax = b$ und $\tilde{A}x = \tilde{b}$ gleiche Lösungsräume oder in einer Formel*

$$\mathit{Lös}(A, b) = \mathit{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b}).$$

Beweis. Da wir endlich viele Umformungen benutzen, genügt es zu zeigen (nach Induktion), dass sich die Lösungsmenge nach einer einzelnen Operation nicht ändert.

<u>Fall I</u> ($L_i \leftrightarrow L_k$): Da alle Gleichungen simultan erfüllt sein müssen, ändert diese Operation die Lösungsmenge nicht, sondern nur die Reihenfolge der Gleichungen, die irrelevant ist.

<u>Fall II</u> ($L_k + \lambda L_i \to L_k$): Merken Sie zuerst: das neue lineare Gleichungssystem in diesem Fall hat die Gleichung

$$\begin{aligned}(a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n) + \lambda(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)&\\ = (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 + \ldots + (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n &= b_k + \lambda b_i\end{aligned}$$

anstelle der Gleichung

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

Dass sich die Lösungsmenge in diesem Fall nicht ändert, folgt also auf folgender Aussage: Die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{0.1}$$

ist gleich der Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 + \ldots + (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n &= b_k + \lambda b_i. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Erfüllt $(x_1, \ldots, x_n)$ die Gleichungen (0.1), so kann man das λ-fache der erste Gleichungen in (0.1) zur zweiten addieren, um zu sehen, dass auch (0.2) erfüllt ist. Falls $(x_1, \ldots, x_n)$ die Gleichungen in (0.2) erfüllt, kann man das $(-\lambda)$-fache der erste Gleichungen in (0.2) zur zweiten addieren, und erhält, dass $(x_1, \ldots, x_n)$ auch (0.1) erfüllt.

<u>Fall III</u> ($\lambda L_i \leftrightarrow L_i$): Hier müssen wir zeigen, dass die Lösungen von

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \tag{0.3}$$

den Lösungen von

$$\lambda a_{i1}x_1 + \ldots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \tag{0.4}$$

gleichen. Erfüllt $(x_1, \ldots, x_n)$ die Gleichung (0.3), dann können wir die Gleichung mit λ multiplizieren, um zu sehen, dass $(x_1, \ldots, x_n)$ auch (0.4) erfüllt. Erfüllt $(x_1, \ldots, x_n)$ umgekehrt die Gleichung (0.4), dann wir wir diese durch λ teilen[3], um zu sehen, dass $(x_1, \ldots, x_n)$ auch (0.3) erfüllt.

Dies zeigt, dass eine elementare Umformung die Lösungsmenge nicht verändert. Mit Induktion folgt jetzt, dass endlich viele Umformungen (von einem der obigen Typen) die Lösungsmenge ebenfalls nicht ändern, was zu zeigen war. □

0.4.7 Von Anfang nach "Endgame"

Satz 0.3. *Jede Matrix kann man durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf Stufenform bringen.*

Bemerkung 0.4. Die Definition der Stufenform bezieht sich auf die Koeffizientenmatrix A und nicht auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Die Zeilenoperationen hingegen führt man auf der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ durch.

Beweis. Siehe Fischer [1], Seiten 28–29. □

Bemerkung 0.5. Der Beweis verwendet nur die ersten zwei Zeilenoperationen. Von der Seite der Theorie könnte man mit der dritten Operation eine Stufenform erhalten, wo alle Pivots gleich 1 sind.

[3] Hier verwenden wir, dass $\lambda \neq 0$ ist!

Literaturverzeichnis

[1] G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, Grundkurs Mathematik, Springer, 2008.