Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

# Einführung in die Lineare Algebra

Menny Akka Ginosar

18. September 2020

In dieser Einführung werden wir (mittels linearer Algebra) ein Problem lösen, das mich als Jugendlicher genervt hat.

In der Mittelschule haben wir Folgen kennengelernt. Es gibt die arithmetische Folge: Für zwei Zahlen $a, d$ definiert man

$$\begin{cases} a_0 & = a \\ a_n & = a_{n-1} + d, \quad n \geq 1 \end{cases}.$$

Hier kann man fast problemlos eine Formel für das $n$-te Folgenglied finden. Konkret heisst das, dass wir einen Ausdruck für das $n$-te Folgenglied finden, der nur von $n$ abhängt. Der Ausdruck ist gegeben durch $a_n = a + nd$ für $n \geq 0$ und wenn wir wollten, könnten wir problemlos $a_{12345}$ auch ohne Taschenrechner in weniger als einer halben Minute berechnen. Eine ähnliche Geschichte haben wir in der Mittelschule mit der geometrischen Folge gehabt: Seien $a, q$ zwei Zahlen, dann definieren wir

$$\begin{cases} a_0 & = a \\ a_n & = a_{n-1}q, \quad n \geq 1 \end{cases}.$$

In diesem Fall ist eine Formel für $a_n$ mit $n$ als Variable durch $a_n = aq^n$ für $n \geq 0$ gegeben.

Für mich hat der interessante Teil des Stoffs hier aufgehört. Man „beweist“ dann in der Regel viele Identitäten, die fast tautologisch sind, betrachtet die Summenfolge (das ist vielleicht doch interessant). Man kann jedoch viele interessante Fragen zum Beispiel über arithmetische Folgen stellen. Hier sind einige:

1. Sei $a_n = a + nd$ eine arithmetische Folge. Enthält die Folge unendlich viele Primzahlen? Das heisst, gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_n$ eine Primzahl ist?

   Angenommen $a, d$ sind nicht teilerfremd (d.h. es gibt $l \geq 1$, so dass $l$ sowohl $a$ als auch $d$ teilt), dann kann die Folge höchstens eine Primzahl enthalten.

   **Theorem 1.1** (Dirichlet, 1837)**.** *Seien $a, d \in \mathbb{N}, a \geq 1, d > 1$ teilerfremd. Dann enthält die Folge $a_n = a + nd$ unendlich viele Primzahlen*[1].

   Für den Beweis des Satzes brauchen Sie mehr oder weniger einen Bachelor in Mathematik (dies könnte zum Beispiel das Thema Ihrer Bachelorarbeit sein). Falls Sie nicht bis dahin warten wollen, dann können Sie hier [2] anfangen.

2. Wegen Dirichlets Theorem (Theorem 1.1) könnten wir uns fragen, wann die erste Primzahl in einer arithmetischen Folge vorkommt. Im Jahre 1944 hat Yuri Vladimirovich Linnik, ein Mathematiker, der meine eigene Forschung stark beeinflusst,

[1] Zum Beispiel gibt es unendlich viele Primzahlen der Form $1 + 4k$ für $k \in \mathbb{N}$ und unendlich viele der Form $3 + 4k$ für $k \in \mathbb{N}$.

bewiesen, dass es Konstanten $c, L > 0$ gibt, so dass die erste Primzahl in einer arithmetischen Folge $a + nd$ mit $a, d$ teilerfremd (und $1 \leq a < d$) kleiner als $cd^L$ ist. Nehmen Sie sich ein bisschen Zeit, um diese Aussage richtig zu verstehen. Hier ist eine Vermutung[2], dass obiges Theorem von Linnik mit $c = 1, L = 2$ gilt. Mehr dazu hier.

3. Jetzt können wir uns fragen, ob wir eine „Kette“ von Primzahlen in irgendeiner arithmetischen Folge finden können. Was genau damit gemeint ist, können sie hier nachlesen.

Diese Fragen und Theoreme sind schön, aber deren Lösungen sind nicht direkt mit linearer Algebra verbunden. Um näher zur linearen Algebra zu kommen, betrachten wir eine andere berühmte Folge, die Fibonacci-Folge. Diese ist folgendermassen definiert:

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Wenn wir diese mit den oben definierten Folgen vergleichen, stellt sich sofort die Frage, ob wir einen Ausdruck/eine Formel für das $n$-te Glied der Fibonacci-Folge finden können. Es ist eigentlich nicht offensichtlich, dass es so eine Formel überhaupt gibt, aber als Jugendlicher habe ich gehört, dass es eine Formel für das $n$-te Glied der Fibonacci-Folge geben soll. Es konnte mir jedoch niemand sagen, wie diese Formel aussieht oder wie man sie findet (in diesen uralten Zeiten gab es noch kein Wikipedia...). Wir werden jetzt diese Formel zusammen finden und dabei fast allen Begriffen und Themen von diesem Kurs (zumindest vom ersten Semester) begegnen. Der erste Schritt in diesem Abenteuer ist sehr unintuitv; wir verkomplizieren die Sache. Wir haben keine Ahnung wie wir dieses Problem lösen können und betrachten dazu noch unendlich viele (verwandte) Probleme, die wir ebenfalls nicht lösen können... ziemlich verrückt! Um diese neuen Probleme einführen zu können, entwickeln wir ein bisschen „Sprache“. Das heisst, wir führen einige Begriffe und Definitionen ein. Wir werden jetzt Folgen als Objekte betrachten und sie mit schönen kalligrafischen Buchstaben bezeichnen. Zum Beispiel schreiben wir: Sei $\mathcal{F}$ die Fibonacci-Folge, die in (1.1) definiert ist.

**Definition 1.2.** Wir sagen, dass wir eine Folge *gut kennen*, wenn wir eine Formel für ihr $n$-tes Folgenglied gefunden haben.

Zum Beispiel kennen wir alle arithmetischen und geometrischen Folgen gut. Wir können jetzt unser Ziel so ausdrücken: Wir möchten gerne $\mathcal{F}$ gut kennen. Wie versprochen, machen wir die Sache komplizierter:

[2]Eine Vermutung ist eine Aussage, von welcher die mathematische Gemeinschaft glaubt, dass sie richtig ist, aber die bis anhin noch niemand beweisen konnte.

**Definition 1.3.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. Wir definieren die Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ mittels der Rekursion

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = b \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{0,1}$. Also können wir unser Ziel so ausdrücken: Wir möchten $\mathcal{F}_{0,1}$ gut kennen. Der Schlüssel für die Lösung ist nun das verrückte neue Ziel:

Neues Ziel: Wir möchten $\mathcal{F}_{a,b}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gut kennen.

Wie kann es sein, dass wir mehr Hoffnung für dieses neue Ziel haben als für das ursprüngliche Ziel? Zunächst klingt das verrückt, da das neue Ziel so aussieht wie unendlich viele Varianten des alten Problems. Das neue Problem ist ein Raum von Problemen und hier liegt eigentlich der Hund begraben. Dieser Raum hat eine gewisse Struktur und wir können diese Struktur ausnutzen. Bevor wir anfangen, geben wir noch eine Definition an:

**Definition 1.4.** Eine Folge $\mathcal{A}$ heisst eine *Fibonacci-Folge*, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{a,b}$. Den Raum aller Fibonacci-Folgen nennen wir **Fib**.

**Übung 1.5.** *Zeigen Sie, dass eine Folge* $(a_0, a_1, \ldots)$ *eine Fibonacci-Folge ist genau dann, wenn* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *für alle* $n \geq 2$.

Es gilt

$$\mathbf{Fib} = \{\mathcal{F}_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

und unser Ziel ist es, alle Elemente von **Fib** gut zu kennen.

## 1.1 Welche Struktur hat Fib?

Wir nehmen zwei Folgen $\mathcal{F}_1 = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $\mathcal{F}_2 = (b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots)$ und formen ihre komponentenweise Addition

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots).$$

Behauptung: Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Fibonacci-Folgen, dann ist auch $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ eine Fibonacci Folge. Wir bezeichnen die Glieder von $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ als $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = (c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots)$. Laut Übung 1.5 müssen wir lediglich zeigen, dass

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Beweisen wir es: Es gilt

$$c_n = a_n + b_n$$

und da $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{Fib}$ haben wir

$$a_n + b_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) = (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}) = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Daher gilt in der Tat $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

**Übung 1.6.** *Mit der Notation von Definition 1.3 erklären Sie für sich selbst, dass das obige Argument Folgendes zeigt:*

$$\mathcal{F}_{a,b} + \mathcal{F}_{c,d} = \mathcal{F}_{a+c,b+d}.$$

Kurz gesagt, können wir zwei Elemente von **Fib** addieren. Der Fibonacci-Folgen Raum **Fib** hat also eine Addition. Ausser der Addition haben wir noch eine andere Operation in **Fib**: eine Multiplikation mit einem Skalar. In diesem Zusammenhang ist „Skalar“ einfach ein komischer Name für eine reelle Zahl. Später in diesem Kurs möchten wir andere „Typen“ von Zahlen betrachten, die einen sogenannten Körper formen (vielleicht haben Sie schon vom Körper der reellen/komplexen Zahlen oder von endlichen Körpern gehört) und ein Skalar ist dann einfach ein Element eines Körpers. Im Moment ist jedenfalls ein Skalar einfach ein Synonym für eine reelle Zahl. Also, sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Wir definieren die Multiplikation von $\mathcal{A}$ mit dem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ als

$$\alpha\mathcal{A} := (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots).$$

**Übung 1.7.** *Argumentieren sie ähnlich wie im Fall der Addition, um folgende Behauptung zu zeigen: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} \in \mathbf{Fib}$. Dann gilt auch $\alpha\mathcal{A} \in \mathbf{Fib}$. Zeigen Sie des Weiteren, dass $\alpha\mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{\alpha a,\alpha b}$.*

Wir haben also gesehen, dass der Raum **Fib** Addition und Multiplikation mit einem Skalar hat. Wie hilft uns das, unsere Aufgabe $\mathcal{F}_{0,1}$ gut zu kennen, zu lösen? Geduld bringt Rosen. . .

Bemerken Sie zuerst das Folgende: Wenn man $\mathcal{F}_1 = (a_0, a_1, \ldots)$ und $\mathcal{F}_2 = (b_0, b_1, \ldots)$ gut kennt, dann kennt man auch $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ gut. In der Tat, wenn man eine Formel für $a_n$ und $b_n$ hat, dann hat man auch eine Formel für das $n$-te Folgenglied. Nämlich, wenn $a_n = f(n)$ und $b_n = g(n)$ Formeln für das $n$-Glied sind, dann ist $f(n)+g(n)$ eine Formel für $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$. Ähnlicherweise, wenn man eine Folge $\mathcal{A} \in \mathbf{Fib}$ gut kennt, dann kennt man auch $\alpha\mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gut. Allgemeiner, zeigen Sie:

**Übung 1.8.** *Wenn wir $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ gut kennen, dann kennen wir*

$$\alpha_1 \mathcal{F}_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{F}_k \tag{1.2}$$

*für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gut.*

Ausdrücke der Form (1.2) heissen lineare Kombinationen von Folgen.

Anders gesagt, kann man mittels der Struktur von **Fib** das Wissen über einige Elemente von **Fib** auf andere Elemente von **Fib** übertragen.

Das ist alles sehr schön, aber es gibt kein einziges Element von **Fib**, das wir gut kennen! Das ist eigentlich nicht wahr. Es gibt doch ein Element von **Fib**, das wir gut kennen.

**Übung 1.9.** *Finden Sie es, bevor Sie weiter lesen.*

Die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{0,0}$ kennen wir sehr gut: Wenn $\mathcal{F}_{0,0} = (a_0, a_1, \ldots)$, dann ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Heisst das, dass wir jetzt mittels der Struktur von **Fib** viele andere Folgen gut kennen? Leider nicht, denn $\mathcal{F}_{0,0} + \mathcal{F}_{0,0}$ oder $\alpha\mathcal{F}_{0,0}$ ergeben leider keine neuen Folgen... Wir bekommen einfach $\mathcal{F}_{0,0}$ wieder und wieder. Also, wenn wir nur $\mathcal{F}_{0,0}$ gut kennen, können wir mittels Addition und Skalarmultiplikation nicht weiterkommen. Wie viele Folgen sollten wir kennen, um alle Elemente von **Fib** gut zu kennen?

Nehmen wir an, dass wir eine Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ mit $a$ und $b$ beide nicht Null gut kennen. Dann kennen wir mittels Skalarmultiplikation $\mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gut.

**Übung 1.10.** *Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq$ **Fib** unter der Annahme $(a, b) \neq (0, 0)$ unendlich viele Elemente enthält, aber trotzdem niemals gleich **Fib** ist.*

Diese Übung zeigt, dass wir zumindest zwei Fibonacci-Folgen gut kennen müssen, um alle Elemente von **Fib** gut zu kennen. Existieren also zwei Folgen in **Fib**, die wir gut kennen und wodurch wir dann alle Elemente von **Fib** gut kennen? Könnte man also zwei Folgen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ **Fib** finden, so dass jede Folge eine lineare Kombination von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist?

Wenn wir zum Beispiel $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$ gut kennen, dann kennen wir alle Elemente von **Fib** gut: Wir können ein allgemeines Element $\mathcal{F}_{a,b}$ von **Fib** folgendermassen schreiben

$$\mathcal{F}_{a,b} = a\mathcal{F}_{1,0} + b\mathcal{F}_{0,1}$$

und daraus folgt eine Formel für $\mathcal{F}_{a,b}$ aus Formeln für $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$.

Dies ist nochmals sehr schön, aber wir sind wieder bei unserem ursprünglichen Problem angelangt! Wir kennen $\mathcal{F}_{0,1}$ noch nicht gut! Im nächsten Abschnitt werden wir zwei andere Folgen gut kennenlernen und mit diesen kann man auch jedes andere Element von **Fib** mit Skalarmultiplikation und Addition erreichen.

*Bemerkung* 1.11. Die Tatsachen, dass

(1) zwei Folgen reichen,

(2) eine Folge nicht reicht (Übung 1.10),

(3) in jeder Menge von drei Folgen es eine Folge gibt, die wir weglassen können ohne die Menge der „erreichbaren Folgen“ zu ändern,

sind verbunden mit der Aussage, dass der Raum **Fib** Dimension 2 hat. Das ist keine Überraschung. Dimension ist fast gleichbedeutend mit der Anzahl „Freiheitsgraden“ des Raums. Überlegen Sie sich, wieso **Fib** genau 2 Freiheitsgrade von reellen Zahlen hat. In anderen Worten, **Fib** ist eine Ebene, in der jeder Punkt eine Folge darstellt.

## 1.2 Vorkenntnisse und Symmetrie

Wie kommt man auf eine neue Idee für die Lösung eines Problems? Normalerweise durch die Nutzung von Vorkenntnissen, die für die Lösung relevant sind oder durch das Erkennen, dass das Problem eine gewisse Symmetrie hat, die wir benutzen können. Vielleicht denken Sie, dass unser Problem gar keine Symmetrie enthält. Immerhin ist dies kein geometrisches Problem...

### 1.2.1 Vorkenntnisse

Bevor wir erklären, welche Symmetrie dieses Problem dennoch geniesst und wieso diese Symmetrie der Schlüssel zur Lösung ist, benutzen wir unsere Vorkenntnisse um Fibonacci-Folgen zu finden, die wir gut kennen.

**Übung 1.12.** *Zeigen Sie, dass* **Fib** *keine arithmetische Folge enthält (ausser $\mathcal{F}_{0,0}$).*

Die Übung zeigt, dass wir mit arithmetischen Folgen nicht vorankommen können. Wie wäre es mit geometrischen Folgen? Kann eine Folge der Form $(a, aq, aq^2, aq^3, \ldots)$ eine Fibonacci-Folge sein? Der Einfachheit halber versuchen wir zuerst $a = 1$, das heisst mit einer Folge der Form

$$\mathcal{G}_q = (1, q, q^2, \ldots)$$

mit $q \neq 0$. Die Folge $\mathcal{G}_q$ ist eine Fibonacci-Folge, genau dann, wenn

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \tag{1.3}$$

für alle $n \geq 2$ gilt. Da $q \neq 0$, können wir (1.3) durch $q^{n-2}$ dividieren und daher ist (1.3) äquivalent zu

$$q^2 = q + 1. \tag{1.4}$$

Dies können wir mittels anderer Vorkenntnisse lösen, der Mitternachtsformel[3]! Gleichung (1.4) gilt genau dann, wenn

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Es ist üblich die Zahl

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033\ldots \quad \text{(goldener Schnitt)}$$

mit $\varphi$ zu bezeichnen und die Zahl

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618033\ldots \quad \text{(konjugierter goldener Schnitt)}$$

mit $\psi$. Fassen wir diesen Teil zusammen: die Folgen

$$\mathcal{G}_\varphi = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_\psi = (1, \psi, \psi^2, \psi^3, \ldots)$$

sind beides Elemente von **Fib**, die wir gut kennen! Dies ist wunderbar, aber können wir mittels Addition und Skalarmultiplikation von $\mathcal{G}_\varphi$ und $\mathcal{G}_\psi$, die ursprüngliche Folge $\mathcal{F}_{0,1}$ ausdrücken? Ja!

**Übung 1.13.** *Verifizieren Sie, dass*

$$\frac{1}{\varphi - \psi}\mathcal{G}_\varphi + \frac{1}{\psi - \varphi}\mathcal{G}_\psi = \mathcal{F}_{0,1}.$$

*Bemerkung* 1.14. Um Übung 1.13 zu lösen, müssen Sie wahrscheinlich ein lineares Gleichungssystem lösen. Lineare Gleichungssysteme liegen im Herzen der linearen Algebra. Eines unserer ersten Themen wird ein Algorithmus sein, um lineare Gleichungssysteme zu lösen, die Gauss-Elimination.

Übung 1.13 gibt eine Formel für das $n$-te Glied von $\mathcal{F}_{0,1} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$:

$$a_n = \frac{1}{\varphi - \psi}\varphi^n + \frac{1}{\psi - \varphi}\psi^n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

Wir sind am Ziel angekommen!

**Übung 1.15.** *Sei $\mathcal{F}_{0,1} = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$. Unter der Annahme, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$ existiert, berechnen Sie diesen Grenzwert. Dies gibt eine andere Motivation geometrische Folgen mit $q$ als den Wert dieses Grenzwert zu betrachten.*

[3]Endlich eine Motivation zum Lösen einer quadratischen Gleichung!

### 1.2.2 Symmetrie

Man könnte sagen, dass dies nur ein Glückstreffer war. Wie konnten wir wissen, dass geometrische Folgen hilfreich sein würden? Das ist eine berechtigte Frage. Wie vorhin erwähnt, könnte man diese geometrischen Folgen entdecken, wenn man die Symmetrie des Raums **Fib** betrachtet. Was aber bedeutet Symmetrie in diesem Zusammenhang? Wenn $X$ irgendein geometrischer Raum ist, dann ist eine Symmetrie von $X$ eine Abbildung[4]

$$T : X \to X,$$

die alle/einige der geometrischen Eigenschaften von $X$ erhält, wie beispielsweise Distanz, Winkel usw. Wenn $T : X \to X$ eine Symmetrie ist, dann ist die Menge der Fixpunkte

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in X : T(x) = x\}$$

normalerweise eine interessante Menge zum Betrachten. In anderen Worten ist ein Fixpunkt ein Element, das auf sich auf sich selbst abgebildet wird. Um den Symmetriebegriff auf allgemeinere Räume zu verallgemeinern, könnten wir das Folgende definieren: Sei $X$ ein Raum mit einer gewissen Struktur. Eine Symmetrie von $X$ ist eine Abbildung $T : X \to X$, die die Struktur von $X$ erhält/respektiert.

Wenn $X = \mathbf{Fib}$ bekommen wir das Folgende:

**Definition 1.16.** Eine Abbildung $T : \mathbf{Fib} \to \mathbf{Fib}$ heisst eine Symmetrie von **Fib**, wenn für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Fib}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$T(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = T(\mathcal{A}) + T(\mathcal{B}) \quad \text{und} \quad T(\alpha\mathcal{A}) = \alpha T(\mathcal{A}). \tag{1.5}$$

Die Anforderungen in (1.5) sind das, was wir meinen mit „$T$ respektiert die Struktur von **Fib**“.

Überlegen wir zuerst, welche Abbildungen $T : X \to X$ wir überhaupt kennen. Hier sind drei Beispiele, die nicht so interessant sind:

1. Die Identitäts-Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} : \mathbf{Fib} &\to \mathbf{Fib} \\ \mathcal{A} &\mapsto \mathcal{A}, \end{aligned}$$

die „nichts“ macht.

[4]Eine *Abbildung* ist ein anderer Name für eine Funktion. Das ist eine Regel, die jedem Element von $X$ ein bestimmtes Element von $X$ zuordnet. Dies und andere Grundlagen werden wir zusammen mit der Analysisvorlesung bald sorgfältig definieren.

2. Die Skalarmultiplikations-Abbildung: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\alpha : \mathbf{Fib} &\to \mathbf{Fib} \\ \mathcal{A} &\mapsto \alpha\mathcal{A}. \end{aligned}$$

3. Die Vektoradditions/Folgenadditions-Abbildung: Für $\mathcal{B} \in \mathbf{Fib}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\mathcal{B} : \mathbf{Fib} &\to \mathbf{Fib} \\ \mathcal{A} &\mapsto \mathcal{A} + \mathcal{B}. \end{aligned}$$

**Übung 1.17.** *Zeigen Sie, dass* Id *und* $\mathrm{M}_\alpha$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die Anforderungen in* (1.5) *erfüllen. Zeigen Sie des Weiteren, dass* $\mathrm{A}_\mathcal{B}$ *für* $\mathcal{B} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ *die Anforderungen in* (1.5) ***nicht*** *erfüllt.*

Wie gesagt, sind diese Symmetrien nicht besonders interessant, vielleicht weil sie nicht mit der Tatsache verbunden sind, dass es sich bei **Fib** um einen Raum von Folgen handelt. Diese Abbildungen existieren für jeden Raum, der Addition und Skalarmultiplikation hat.

**Übung 1.18.** *Bevor Sie weiter lesen, versuchen Sie eine interessante andere Abbildung* $T : \mathbf{Fib} \to \mathbf{Fib}$ *zu finden, welche berücksichtigt, dass es sich um einen Folgen-Raum handelt? (Hinweis: Ich behaupte: Wenn man* $\mathcal{F}_{1,0}$ *gut kennt, dann kennt man auch* $\mathcal{F}_{0,1}$ *gut. Wieso?)*

Bei Folgen-Räumen gibt es die Verschiebungs-Abbildung

$$\begin{aligned} S : \mathbf{Fib} &\to \mathbf{Fib} \\ (a_0, a_1, a_2, \ldots) &\mapsto (a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}$$

**Übung 1.19.** *(1) Verifizieren Sie, dass* $S(\mathcal{A}) \in \mathbf{Fib}$ *für* $\mathcal{A} \in \mathbf{Fib}$.

*(2) Verifizieren Sie, dass* $S$ *die Anforderungen in* (1.5) *erfüllt.*

Diese Verschiebungs-Abbildung ist schon eine interessante Symmetrie, die mit Folgen-Räumen verbunden ist. Daher fragen wir uns, welche Fixpunkte $S$ hat:

**Übung 1.20.** *Zeigen Sie, dass* $\mathcal{F}_{0,0}$ *der einzige Fixpunkt von* $S$ *ist.*

Gut, die Fixpunkte von $S$ sind nicht so interessant. Es stellt sich heraus, dass für Abbildungen, die (1.5) erfüllen, die Menge von Fixpunkten häufig nicht interessant ist. Die Forderung $S(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ist einfach zu einschränkend, um interessante Folgen zu bekommen. Daher betrachtet man eine schwächere Anforderung (die auch mit der Skalarmultiplikation verbunden ist).

**Definition 1.21.** Sei $T : \mathbf{Fib} \to \mathbf{Fib}$ eine Symmetrie. Eine Folge $\mathcal{A} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ heisst eine *Eigenfolge* von $T$, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$T(\mathcal{A}) = \alpha A.$$

Der Skalar $\alpha$ heisst der *Eigenwert* von $\mathcal{A}$.

Wir möchten also alle Eigenfolgen der Symmetrie $S$ finden[5]. Dafür nehmen wir an, dass $\mathcal{A} = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \neq F_{0,0}$ eine Eigenfolge mit Eigenwert $\alpha$ ist. Dann gilt $S(\mathcal{A}) = \alpha A$ oder in anderen Worten

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \alpha(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots).$$

Also gilt $a_n = \alpha a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Daher hat $\mathcal{A}$ die Form

$$\mathcal{A} = (a_0, a_0\alpha, a_0\alpha^2, a_0\alpha^3, \ldots). \tag{1.6}$$

Das heisst, dass $\mathcal{A}$ eine geometrische Folge ist. Welche $\alpha$ (und welche $a_0$) kommen also in Frage? Dies haben wir schon in Abschnitt 1.2.1 gesehen, aber leiten wir es nochmals her: Aus (1.6) folgt insbesondere, dass

$$a_n = \alpha^n a_0$$

für alle $n \geq 0$. Da $\mathcal{A} \in \mathbf{Fib}$ gilt auch $a_2 = a_1 + a_0$ und zusammen bekommen wir

$$\alpha^2 a_0 = a_2 = a_1 + a_0 = \alpha a_0 + a_0 = (\alpha + 1)a_0. \tag{1.7}$$

Aus $\mathcal{A} \neq \mathcal{F}_{0,0}$ folgt, dass $a_0 \neq 0$. (Wieso? Finden Sie eine überzeugende Erklärung.) Daher ist (1.7) äquivalent zu $\alpha^2 = \alpha + 1$. Sieht das bekannt aus? Dies ist gerade die Gleichung (1.4). Dies bedeutet: Wenn $\mathcal{A}$ eine Eigenfolge mit Eigenwert $\alpha$ ist, dann gilt $\alpha^2 = \alpha + 1$ beziehungsweise $\alpha = \psi$ oder $\alpha = \varphi$. Das heisst, $\mathcal{A}$ ist eine geometrische Folge mit $\alpha = \varphi$ oder $\alpha = \psi$. Der Einfachheit halber wählen wir $a_0 = 1$. Wir bekommen die zwei Folgen, die wir vorher erraten haben

$$\mathcal{G}_\varphi = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_\psi = (1, \psi, \psi^2, \psi^3, \ldots).$$

Zusammenfassung : Die $n$-te Fibonacci-Zahl $F_n$ ist durch

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

[5]Für die fortgeschrittenen Leser bemerken wir das Folgende. Eigenfolgen sind eigentlich Fixpunkte bezüglich der Wirkung von $S$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathbf{Fib})$.

gegeben.

Allgemeiner zeigen Sie:

**Übung 1.22.** *Finden Sie eine Formel für das $n$-te Glied von $\mathcal{F}_{a,b}$, die von $a, b$ und $n$ abhängt.*

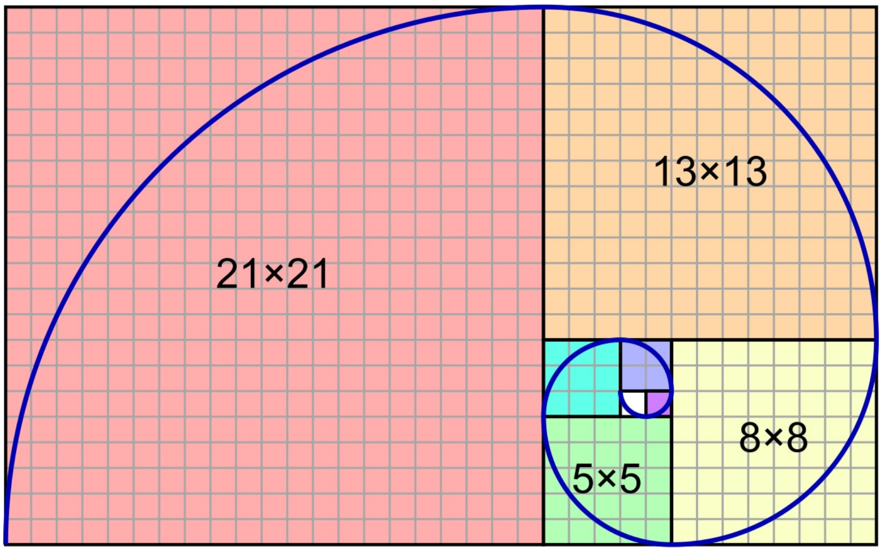
Es gibt noch viele Sachen in diesem Zusammenhang zu sagen, aber wir müssen irgendwann mit dem Kurs anfangen. Hier ist eine kleine Übung als Dessert:

**Übung 1.23.** *Zeigen Sie, dass*

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

*Was genau gemeint ist mit dieser Schreibweise und wie dies mit der Bewegung der Planeten zusammenhängt, können Sie mich fragen oder hier [1, §1.1] nachlesen.*

*Bemerkung* 1.24. Auf die Idee zu dieser Einführung bin ich gekommen, als ich Übungsstunden an der Hebrew University gehalten habe und gefragt wurde, wieso lineare Algebra Spass machen soll. Dies habe ich durch diese Frage mit der Welt geteilt. Viele der Antworten dort sind sehr interessant und lohnen sich, darüber nachzudenken!




Figur 1.1: Ihr nächstes T-Shirt?

# Literaturverzeichnis

[1] Vladimir Igorevič Arnold. *Lectures and problems: A gift to young mathematicians*, volume 17. American Mathematical Soc., 2015.

[2] J. P. Serre. *A course in arithmetic*, volume 7. Springer Service & Business Media, 2012. URL: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4684-9884-4`.