Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Grundlagen

Menny Akka Ginosar

22. September 2020

Kapitel 1

Ein Beweis zu Cantor-Schröder-Bernstein

Theorem 1.1 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Seien A, B zwei Mengen mit $|A| \leqslant |B|$ und $|B| \leqslant |A|$. Dann folgt, dass $|A| = |B|$.*

Beweis. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ zwei injektive Funktionen. Für $x \in A$ versuchen wir mittels f, g, und falls möglich auch mit f^{-1} und g^{-1}, eine Kette zu bilden. Wir bewegen uns zunächst vorwärts: Wir betrachten

$$x, f(x), g(f(x)), f(g(f(x))), \ldots .$$

Nun versuchen wir uns rückwärts zu bewegen: Falls $x \in g(B)$, falls also x ein Urbild bezüglich g in B hat, dann können wir $g^{-1}(x)$ zur Kette hinzufügen,

$$g^{-1}(x), x, f(x), g(f(x)), \ldots .$$

Falls nun $g^{-1}(x) \in f(A)$, dann können wir $f^{-1}(g^{-1}(x))$ zur Kette hinzufügen und so weiter. Beachten Sie, dass dies wohldefiniert ist, da die Funktionen

$$g^{-1} : g(B) \to B \quad \text{und} \quad f^{-1} : f(A) \to A$$

wohldefiniert sind, weil f und g injektiv sind. Wir nennen die resultierende Folge *die Kette, die x enthält.* Diese Kette ist nach rechts immer unendlich lang. Die linke Seite der Kette kann hingegen endlich oder unendlich lang sein. Für ein bestimmtes $x \in A$ betrachten wir die linke Seite der Kette von x und wir machen die folgende Definition.

Für $x \in A$ sagen wir, dass

- x Typ I hat, falls die Kette von x bei einem Element von A stoppt.
- x Typ II hat, falls die Kette von x nie stoppt.

- x Typ III hat, falls die Kette von x bei einem Element von B stoppt.

Wir sagen, dass $y \in B$ Typ I (bzw. II, bzw. III) hat, falls $g(y) \in A$ Typ I (bzw. II, bzw. III) hat.

Wir behaupten, dass wir nun eine surjektive Abbildung von A nach B angeben können: Betrachte $h : A \to B$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ ist von Typ I oder II} \\ g^{-1}(x), & x \text{ ist von Typ III} \end{cases}$$

für $x \in A$. Bemerken Sie zuerst, dass $h(x)$ wohldefiniert ist: Wenn x von Typ III ist, dann stoppt die Kette von x in B und daher hat x bestimmt ein Urbild bezüglich g. Wie vorher bemerkt, ist dieses Urbild eindeutig, da g injektiv ist. Letztlich bemerken Sie, dass x und $h(x)$ zur selben Kette gehören und deshalb den selben Typ haben.

Behauptung 1: h ist injektiv.

Seien $x_1, x_2 \in A$ mit $h(x_1) = h(x_2)$. Wegen obiger Bemerkung ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Typ}(x_1) &= \mathrm{Typ}(h(x_1)) \\ \mathrm{Typ}(x_2) &= \mathrm{Typ}(h(x_2)) \end{aligned}$$

und daher ist $\mathrm{Typ}(x_1) = \mathrm{Typ}(x_2)$. Wenn beide von Typ I oder II sind, dann gilt

$$f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$$

und aus der Injektivität von f folgt, dass $x_1 = x_2$. Wenn beide von Typ III sind, dann gilt

$$g^{-1}(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2)$$

und nochmals folgt, dass $x_1 = x_2$ aus der Injektivität von $g^{-1} : g(B) \to B$. Es folgt, dass h injektiv ist.

Behauptung 2: h ist surjektiv.

Sei $y \in B$. Wenn y von Typ I oder II ist, dann existiert $f^{-1}(y) \in A$ und dieses Element ist ebenfalls vom Typ I oder II. Daraus folgt

$$h(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Wenn y vom Typ III ist, dann ist $g(y) \in A$ auch vom Typ III. Daher gilt

$$h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y.$$

Dies zeigt die Surjektivität und damit folgt, dass $|A| = |B|$. □

Bemerkung 1.2. Im Analysis-Skript gibt es einen anderen schönen Beweis von Theorem 1.1, den man mit einem Bild veranschaulichen kann. Den obigen hübschen Beweis habe ich von Tom Ward gelernt, als wir dieses Buch geschrieben haben. In diesem Buch finden Sie eine Veranschaulichung von diesem Beweis. Diese Ausarbeitung hier wurde von dieser Webseite beeinflusst.