D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich
05.02.2021

Musterlösung zur Prüfung in Lineare Algebra I

Hinweise zur Notation: Für Mengen A, B gilt $A \subsetneq B$ genau dann, wenn $A \subset B$ und $A \neq B$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}[x]_n = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$. Für Vektorräume V, W über einem Körper K und eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W.

1. (**28 Punkte**) Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

   (1) Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $p\,(2i) = 0$ gilt $p\,(-2i) = 0$. Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit.

   (2) Sei p eine Primzahl und seien $f(x) = x^{p^3} - x$ und $g(x) = x^{p^2} - x$. Dann gilt $f = g$ als Abbildungen in $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$.

   (3) Sei K ein Körper und $a \in K$. Aus $a + a + a + a + a + a = 0$ folgt $a + a = 0$ oder $a + a + a = 0$.

   (4) Sei X eine Menge mit $|X| = n > 3$, sodass n nicht durch 3 teilbar ist. Dann gibt es keine Äquivalenzrelation auf X mit genau drei Äquivalenzklassen.

   (5) Es gibt einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^2$, so dass $U \oplus \mathrm{Sp}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathbb{R}^2$ und $U \oplus \mathrm{Sp}\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathbb{R}^2$ gilt.

   (6) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Basis eines Vektorraums V über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann existiert eine Teilmenge $\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, sodass $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis für U ist.

   (7) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $\{x, y, z\}, \{u, v, z\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann gilt $\dim \mathrm{Sp}\,(x, y, z, u, v) > 3$.

   (8) Sei $B = \begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 16\end{pmatrix}$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(A)$ für alle $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (9) Sei $T\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W über einem Körper K und sei $S \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist auch $T(S)$ linear unabhängig.

   (10) Für jede Matrix A gilt $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}\left(A^T\right)$.

   (11) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ für einen Vektorraum V über einem Körper K und es gelte $\dim V = 4$ und $\mathrm{Rang}(T) = 2$. Dann sind $V/\mathrm{Ker}(T)$ und $\mathrm{Ker}(T)$ isomorphe Vektorräume.

   (12) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(AB) = n \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(BA) = n$.

   (13) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(AB) - \det(A) - \det(B) + \det(A + B) = 0$.

   (14) Für jede Matrix A mit $-A^T = A$ gilt $\det(A) = 0$.

   Lösung:

   wahr, wahr, wahr, falsch, wahr, falsch, falsch, falsch, wahr, falsch, wahr, wahr, falsch, falsch

2. (**16 Punkte**) Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Im}(m_A)$ für $m_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(m_A) = 3}$$

Lösung:
Durch Zeilenumformungen bringt man A auf Zeilenstufenform, z.B. wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2 \to L_3]{\frac{1}{4}L_1 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4} & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 9L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{51}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{4}{51}L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{51}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{106}{51} \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat 3 Pivots, also gilt $\dim \operatorname{Im}(m_A) = \operatorname{Rang} A = 3$.

(b) Bestimmen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}).$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -1/8 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

Lösung:
Mit dem Gauss-Jordan-Verfahren bestimmt man die Inverse Matrix, z.B. wie folgt:

$$(A \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - 2L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 - L_2 \to L_4]{L_3 - 2L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 + \frac{1}{2}L_3 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}L_4 \to L_4]{-\frac{1}{4}L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_4 \to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -1/8 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

$\boxed{\det A = -28}$

Lösung:

Man berechnet zum Beispiel mit Laplace-Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned}\det A &= 7\det\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 5\det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 7(30-24) - 5(30-4) + 2(36-6) \\ &= 7\cdot 6 - 5\cdot 26 + 2\cdot 30 = 42 - 130 + 60 = -28.\end{aligned}$$

(d) Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_1$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(5,2) = 11+22x$ und $T(1,7) = 33-11x$. Bestimmen Sie $T(1,4)$.

$\boxed{T(1,4) = 19 - 4x}$

Lösung:

Da die Vektoren $(5,2), (1,7)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden (man sieht leicht, dass sie linear unabhängig sind), ist T gemäß Vorlesung durch die Bilder dieser Vektoren eindeutig bestimmt. Die Darstellung von $(1,4)$ in dieser Basis ist $(1,4) = \frac{1}{11}(5,2) + \frac{6}{11}(1,7)$. Aus der Linearität von T folgt

$$\begin{aligned}T(1,4) &= T\left(\frac{1}{11}(5,2) + \frac{6}{11}(1,7)\right) = \frac{1}{11}T(5,2) + \frac{6}{11}T(1,7) = \frac{1}{11}(11+22x) + \frac{6}{11}(33-11x) \\ &= 1 + 2x + 18 - 6x = 19 - 4x.\end{aligned}$$

3. **(12 Punkte)** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $S_1, S_2 \subseteq V$ endliche Teilmengen mit

$$\mathrm{Sp}(S_2) \subsetneq \mathrm{Sp}(S_1).$$

Dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

Lösung:

Die Aussage ist falsch.

Beweis: Wir wiederlegen die Aussage durch ein Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und seien $S_1 := \{e_1, e_2\}$, $S_2 := \{e_1, 2e_1, 3e_1\} \subseteq V$, wobei $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ die Standardbasisvektoren von V bezeichnen. Dann gilt

$$\mathrm{Sp}(S_2) = \mathrm{Sp}(e_1) \subsetneq \mathrm{Sp}(S_1) = \mathbb{R}^2,$$

aber $|S_2| = 3 > 2 = |S_1|$. $\square$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper. Weiter seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^2 - B^2 \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $AB = BA$. Dann ist $A + B \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Lösung:
Die Aussage ist wahr.
Beweis: Wegen $AB = BA$ gilt

$$(A+B)(A-B) = A^2 + \underbrace{BA - AB}_{=0} - B^2 = A^2 - B^2.$$

Wegen $A^2 - B^2 \in \mathrm{GL}_n(K)$ und der Multiplikativität der Determinante (die Determinante eines Produkts zweier Matrizen ist das Produkt der Determinanten der Matrizen) folgt daraus

$$0 \neq \det\left(A^2 - B^2\right) = \det\left((A+B)(A-B)\right) = \det(A+B)\det(A-B),$$

also $\det(A+B) \neq 0$. Gemäß Vorlesung ist $A+B$ also invertierbar. $\square$

(c) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ mit $\dim V = n < \infty$ und sei $T\colon V \to \mathbb{F}_2$ eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Dann gilt

$$\left|T^{-1}\left(\{\overline{1}\}\right)\right| = \left|\left\{v \in V \,\middle|\, T(v) = \overline{1}\right\}\right| = 2^{n-1}.$$

Lösung:
Die Aussage ist wahr.
Beweis: Wegen $T \neq 0$ gibt es ein $a \in V$ mit $T(a) \neq \overline{0}$, also $T(a) = \overline{1}$. Laut einer Proposition aus der Vorlesung folgt daraus

$$T^{-1}\left(\{\overline{1}\}\right) = a + \mathrm{Ker}(T)$$

und damit $\left|T^{-1}\left(\{\overline{1}\}\right)\right| = |\mathrm{Ker}(T)|$. Wegen $T \neq 0$ gilt $0 < \dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim \mathbb{F}_2 = 1$, also $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$. (*Alternative:* Weil $\mathbb{F}_2$ nur zwei Elemente $\overline{0}$ und $\overline{1}$ enthält, 0 im Bild jeder linearen Abbildung ist und $\overline{1}$ laut Annahme im Bild von T ist (wegen $T \neq 0$), ist T surjektiv, also gilt $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$.)
Laut dem Rangsatz aus der Vorlesung gilt außerdem

$$\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V) = n.$$

Es folgt $\dim \mathrm{Ker}(T) = n - 1$. Da $\mathrm{Ker}(T)$ ein Untervektorraum von V, also ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist, hat $\mathrm{Ker}(T)$ somit 2^{n-1} Elemente. (Wir wissen aus der Vorlesung, dass ein Vektorraum W über $\mathbb{F}_2$ der Dimension m genau 2^m Elemente hat, weil er isomorph zu $\mathbb{F}_2^m$ ist.) Wir erhalten

$$\left|T^{-1}\left(\{\overline{1}\}\right)\right| = |\mathrm{Ker}(T)| = 2^{n-1}$$

wie behauptet. $\square$

4. **(12 Punkte)** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7-5\alpha & 2+10\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ lösbar ist. Geben Sie für diese Werte alle Lösungen von $A_\alpha x = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

Elementare Zeilenumformungen angewendet auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha \mid b)$ ändern die Lösungsmenge von $A_\alpha x = b$ nicht, also formen wir $(A_\alpha \mid b)$ um:

$$(A_\alpha \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 7 & 7-5\alpha & 2+10\alpha & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-7L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 2\alpha & -2\alpha & -4 \\ 0 & 2\alpha & -5+3\alpha & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3-L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 2\alpha & -2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & -5+5\alpha & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 2\alpha & -2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & -1+\alpha & 0 \end{array}\right) =: \left(\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{b}\right)$$

Wir unterscheiden nun verschiedene Fälle.
<u>Fall $\alpha = 1$:</u> Wir haben

$$\left(\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem $A_1 x = b$ ist für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ also lösbar und es gibt eine freie Variable. Wir wählen $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $x_3 = \lambda$. Dann folgt $x_2 = \frac{1}{2}(-4 + 2x_3) = -2 + \lambda$ und $x_1 = 2 - 2x_3 = 2 - 2\lambda$. Die Lösungsmenge im Fall $\alpha = 1$ ist also

$$\text{Lös}\,(A_1, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

[Eine Parametrisierung dieser Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{R} &\to \text{Lös}\,(A_1, b) \subset \mathbb{R}^3, \\ \lambda &\mapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$]

<u>Fall $\alpha = 0$:</u> Wir haben

$$\left(\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

In diesem Fall ist das Gleichungssystem wegen $0 \neq -4$ nicht lösbar, es gilt also $\text{Lös}\,(A_0, b) = \emptyset$.
<u>Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:</u> Wir haben

$$\left(\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 2\alpha & -2\alpha & -4 \\ 0 & 0 & -1+\alpha & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall gibt es eine eindeutige Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, die wir durch Rückwärtseinsetzen bestimmen können. Aus $(-1 + \alpha)\, x_3 = 0$ folgt wegen $\alpha \neq 1$, dass $x_3 = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 2\alpha x_2 = -4 + 2\alpha x_3 = -4 &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{\alpha} \qquad \text{und} \\ x_1 = 2 - (1-\alpha)\, x_2 - (\alpha+1) x_3 &\Leftrightarrow x_1 = 2 + \frac{2 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist also

$$\text{Lös}\,(A_\alpha, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} \\ -\frac{2}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Insgesamt haben wir gesehen, dass das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ lösbar ist genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist, also wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. **(14 Punkte)** Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

   (a) **(2 Punkte)** Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Definieren Sie die Dimension von U.

   Lösung:

   Die Dimension von U ist definiert als $\dim U = n$, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Länge einer Basis von U ist, also als Anzahl an Basisvektoren in einer Basis von U.

   (b) **(6 Punkte)** Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

   Klarstellung: Beachten Sie, dass es nicht genügt, eine Basis anzugeben, ohne zu zeigen, dass diese in der Tat eine Basis ist.

   Lösung:

   Seien $k = \dim(U \cap W)$, $l = \dim(U)$ und $m = \dim W$. Wir behaupten, dass wir folgendermassen eine Basis von $U+W$ bilden können:

   (i) Man wählt eine Basis $p_1, \dots, p_k$ von $U \cap W$.

   (ii) Man wählt eine Basis $p_1, \dots, p_k, u_1, \dots, u_{l-k}$ von U und eine Basis $p_1, \dots, p_k, w_1, \dots, w_{m-k}$ von W.

   (Dabei ist dieses Erweitern von Basen nach Vorlesung immer möglich.) Dann ist

$$p_1, \dots, p_k, u_1, \dots, u_{l-k}, w_1, \dots, w_{m-k} \tag{1}$$

   eine Basis für $U+W$.
   Insbesondere gilt dann die sogenannte Dimensionsformel:

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

   Wir zeigen nun also, dass die Liste in (1) eine Basis von $U+W$ ist.
   Da die Liste eine Basis für U und W enthält, spannt diese Liste wegen $U + W = \text{Sp}\,(U \cup W)$ den Untervektorraum $U+W$ auf. Es bleibt also zu zeigen, dass die Liste in (1) linear unabhängig ist. Nehmen wir also an, dass

$$a_1p_1 + \cdots + a_kp_k + b_1u_1 + \cdots + b_{l-k}u_{l-k} + c_1w_1 + \cdots + c_{m-k}w_{m-k} = 0 \tag{2}$$

   beziehungsweise, dass

$$v := c_1w_1 + \cdots + c_{m-k}w_{m-k} = -(a_1p_1 + \cdots + a_kp_k + b_1u_1 + \cdots + b_{l-k}u_{l-k}).$$

   für $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{l-k}, c_1, \dots, c_{m-k} \in K$. Einerseits gilt $v \in W$, da die linke Seite in W ist. Andererseits gilt $v \in U$, da die rechte Seite in U ist. Daher ist $v \in U \cap W$.
   Also existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ mit $v = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_k p_k$ und somit

$$\alpha_1p_1 + \ldots + \alpha_kp_k = c_1w_1 + \ldots + c_{m-k}w_{m-k}.$$

Da $\{p_1, \ldots, p_k, w_1, \ldots, w_{m-k}\}$ linear unabhängig ist (weil die Menge nach Konstruktion in (ii) eine Basis von W bildet), folgt $c_1 = \ldots = c_{m-k} = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. Dadurch vereinfacht sich Gleichung (2) zu

$$a_1 p_1 + \cdots + a_k p_k + b_1 u_1 + \cdots + b_{l-k} u_{l-k} = 0.$$

Da auch $\{p_1, \ldots, p_k, u_1, \ldots, u_{l-k}\}$ linear unabhängig ist (die Menge ist nach Konstruktion in (ii) eine Basis von U), gilt

$$a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_{l-k} = 0.$$

Dies zeigt, dass die Liste in (1) linear unabhängig und daher eine Basis von $U + W$ ist. Daraus folgt $\dim(U + W) = l + m - k$, also auch die Dimensionsformel.

(c) **(6 Punkte)** Sei nun $\dim V = 9$ und seien $U, W, Z \subseteq V$ Untervektorräume mit

$$\dim U = \dim W = \dim Z = 6.$$

Angenommen, es existiert ein $x \in V$ mit $x \notin W + Z$. Zeigen Sie, dass dann ein $v \in V$ existiert mit $v \neq 0$ und $v \in U \cap W \cap Z$.

Lösung:

Wir benutzen die Dimensionsformel aus Teilaufgabe (b). Zunächst stellen wir fest, dass nach Annahme $V \neq W + Z$ ist. Also ist $W + Z$ ein echter Untervektorraum von V, das heißt, $W + Z \subsetneq V$ und somit gilt gemäß Vorlesung

$$\dim(W + Z) < \dim V = 9, \qquad \text{also } \dim(W + Z) \leq 8.$$

Aus der Dimensionsformel und den Voraussetzungen folgt nun

$$\dim(W \cap Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W + Z) = 6 + 6 - \underbrace{\dim(W + Z)}_{\leq 8} \geq 12 - 8 = 4.$$

Wir wenden nochmal die Dimensionsformel an und erhalten

$$\begin{aligned} \dim(U \cap (W \cap Z)) &= \dim U + \dim W \cap Z - \dim(U + (W \cap Z)) \\ &\geq 6 + 4 - \underbrace{\dim(U + (W \cap Z))}_{\leq \dim V = 9} \geq 6 + 4 - 9 = 1. \end{aligned}$$

Aus $\dim(U \cap W \cap Z) \geq 1$ folgt $U \cap W \cap Z \neq \{0\}$, also gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $v \in U \cap W \cap Z$ wie behauptet.

6. **(14 Punkte)** (a) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und seien $f_1, f_2, f_3 \in V$ gegeben durch $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = 2^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei weiter $U = \mathrm{Sp}(f_1, f_2, f_3) \subseteq V$.

(i) **(3 Punkte)** Sei $g \in V$ gegeben durch $g(x) = x + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $f \in U$ gilt $f \circ g \in U$. Hierbei bezeichnet $\circ$ die Verkettung von Abbildungen.

Lösung:

Behauptung: Für alle $f \in U$ gilt $f \circ g \in U$.

Beweis: Sei $f \in U = \mathrm{Sp}(f_1, f_2, f_3)$. Dann gibt es $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $f = af_1 + bf_2 + cf_3$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(x + 2) = (af_1 + bf_2 + cf_3)(x + 2) = af_1(x + 2) + bf_2(x + 2) + cf_3(x + 2) \\ &= 2a + b(x + 2) + c2^{x+2} = (2a + 2b) + bx + 2^2 c 2^x = (a + b)2 + bx + 4c2^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$f \circ g = (a + b)f_1 + bf_2 + 4cf_3.$$

Somit ist wegen $a + b, b, 4c \in \mathbb{R}$ auch $f \circ g \in U$. $\square$

(ii) **(3 Punkte)** Sei $T\colon U \to U$ die lineare Abbildung definiert durch $f \mapsto f \circ g$ für g wie in (i). Es ist $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ eine geordnete Basis des Untervektorraums U von V. (Dies müssen Sie nicht zeigen.) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ und begründen Sie Ihre Rechnungen.
Lösung:
Wegen

$$\begin{aligned} f_1(g(x)) &= f_1(x+2) = 2, \\ f_2(g(x)) &= f_2(x+2) = x+2, \\ f_3(g(x)) &= f_3(x+2) = 2^{x+2} = 4 \cdot 2^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 \circ g = 2 = f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3, \\ T(f_2) &= f_2 \circ g = x + 2 = f_1 + f_2 + 0 \cdot f_3, \\ T(f_3) &= f_3 \circ g = 4 \cdot 2^x = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3. \end{aligned}$$

Per Definition der Darstellungsmatrix folgt daraus

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) **(8 Punkte)** Sei K ein Körper und sei $T\colon K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung mit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für geordnete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von K^2 und $T \circ T = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $b \in K$ gibt mit $b \neq 0$ und $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Lösung:
Die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ hat als Matrix in $M_{2\times 2}(K)$ die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in K$. Wegen $T \circ T = 0$ gilt somit nach der Transformationsformel aus der Vorlesung

$$[0]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$[0]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [T \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $[0]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ folgt aus der zweiten Zeile direkt $a = c = 0$ und somit aus der ersten Zeile $\begin{pmatrix} 0 & bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = [0]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $d^2 = 0$ und damit $d = 0$ (wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers K). Somit ist $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von der Form $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für ein $b \in K$. Wegen $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ kann T nicht die Nullabbildung sein, also muss $b \neq 0$ gelten.

Alternative Lösung: Seien $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ für Vektoren $v_1, v_2, w_1, w_2 \in K^2$. Laut der Definition der Darstellungmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Sp}(Tw_1, Tw_2) = \operatorname{Sp}(v_1 + 0v_2, 0v_1 + 0v_2) = \operatorname{Sp}(v_1).$$

Es folgt, dass v_1 eine Basis von $\operatorname{Im}(T)$ ist. (Wegen $v_1 \in \mathcal{B}$ ist $v_1 \neq 0$.) Da $T^2 = 0$ ist, gilt

$$T(v_1) = T(T(w_1)) = 0.$$

Es muss also $T(v_2) \neq 0$ gelten, denn sonst wäre $T = 0$, da $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von K^2 ist. Damit ist $T(v_2)$ ein von Null verschiedener Vektor in $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Sp}(v_1)$, also gilt $T(v_2) = bv_1$ für ein $0 \neq b \in K$. Mit der Definition der Darstellungsmatrix erhalten wir nun $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alternative Lösung:
Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$. Da laut Vorlesung $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [T \circ \mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ gilt, haben wir

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $T^2 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [T^2]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\right)^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist $a^2 = 0$, was wegen der Nullteilerfreiheit in K impliziert, dass $a = 0$ ist. Es folgt

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wegen $T \neq 0$ auch $b \neq 0$ sein muss.

7. **(6 Punkte)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

die Matrix mit Einträgen 7 auf der Diagonalen und Einträgen 3 sonst. Zeigen Sie

$$\det(A_n) = 4^{n-1}\big(4 + 3n\big).$$

Klarstellung: Folgern Sie die Aussage nicht einfach direkt aus der Aussage einer sehr ähnlichen Übungsaufgabe aus den Serien.

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Durch Addieren der ersten $n-1$ Spalten zur letzten Spalte, erhält man eine Matrix, deren letzte Spalte dem Spaltenvektor $(7 + 3(n-1)) \cdot (1, \dots, 1)^T$ entspricht. Durch Herausziehen des Faktors $(7 + 3(n-1))$ und Subtrahieren des 3-fachen der letzten Spalte von allen anderen Spalten erhält man dann eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen auf den Diagonalen $4, \dots, 4, 1$. Es folgt

$$\det(A_n) = (7 + 3(n-1)) \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 4 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (7 + 3(n-1))4^{n-1} = 4^{n-1}\big(4 + 3n\big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternative Lösung: Durch Subtrahieren der ersten Zeile von den letzten $n-1$ Zeilen ($L_i - L_1 \to L_i$ für $i = 2, \ldots, n$) erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ -4 & 4 & 0 & \ldots & 0 \\ -4 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -4 & 0 & \ldots & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Durch Addieren der letzten $n-1$ Spalten zur ersten Spalte erhält man nun die Matrix

$$D_n := \begin{pmatrix} 7+3(n-1) & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 0 & 4 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weil elementare Zeilen- und Spaltenformungen des verwendeten Typs die Determinante nicht ändern, gilt $\det(A_n) = \det(D_n)$. Weil D_n eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\det(A_n) = \det(D_n) = \big(7 + 3(n-1)\big)4^{n-1} = 4^{n-1}(4+3n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wie behauptet.

Alternative Lösung: Sei B_n die $(n \times n)$-Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 3 & 7 & 3 & \ldots & 3 \\ 3 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & 3 & \ldots & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Es gilt $\det(B_n) = 3 \cdot 4^{n-1}$.

Beweis: Wir verwenden Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B_1 = (3)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von B_{n+1} erhält man die Matrix

$$B'_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & \ldots & 0 \\ 3 & 7 & 3 & \ldots & 3 \\ 3 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & 3 & \ldots & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von B'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(B_{n+1}) = \det(B'_{n+1}) = -(-4)\det(B_n) \overset{\text{IH}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^n,$$

wobei IH eine Abkürzung für Induktionshypothese ist. Dies schließt den Induktionsschritt ab und beweist somit die Behauptung. $\square$

Behauptung: Es gilt $\det(A_n) = 4^{n-1}\big(7+3(n-1)\big)$.

Beweis: Wir verwenden wiederum Induktion über n. Wegen $A_1 = (7)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von A_{n+1} erhält man die Matrix

$$A'_{n+1} := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 7 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von A'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man unter Benutzung der obigen Behauptung

$$\begin{aligned} \det(A_{n+1}) &= 4\det(A_n) - (-4)\det(B_n) \\ &\overset{\text{IH}}{=} 4^n\big(7+3(n-1)\big) + 3\cdot 4^n \\ &= 4^n(7+3n). \end{aligned}$$

Die Aussage gilt also auch für $n+1$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ wie behauptet. $\square$

Aus der zweiten Behauptung folgt nun wegen $\det(A_n) = 4^{n-1}\big(7+3(n-1)\big) = 4^{n-1}\big(4+3n\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage.

Alternative Lösung: Die Aussage kann auch unter Benutzung der Aussage von Aufgabe 5 (b) von Serie 12 für $K = \mathbb{R}$ gezeigt werden. Laut dieser Aufgabe gilt

$$\det\left(S + uv^T\right) = \det(S)\left(1 + v^T S^{-1} u\right)$$

für alle $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $u\,, v \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Für $S = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & \ddots & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $u = (1,\dots,1)^T, v = (3,\dots,3)^T$ erhält man

$$\det(A_n) = \det\left(S + uv^T\right) = \det(S)\left(1 + v^T S^{-1} u\right) = 4^n \left(1 + (3,\dots,3)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 4^n \left(1 + (3,\dots,3)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \vdots \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) = 4^n\left(1 + \frac{3}{4}n\right) = 4^{n-1}\left(4+3n\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wie behauptet.

Alternative Lösung: Durch Subtrahieren der $j+1$-ten Zeile von der j-ten Zeile für alle $j \in \{1,\dots,n-1\}$ erhält man die Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet nun

$$L_n = L_n - \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{n-1} L_j - \frac{3}{4}\sum_{j=2}^{n-1} L_j - \cdots - \frac{3}{4}\sum_{j=n-1}^{n-1} L_j = L_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3}{4}\sum_{j=k}^{n-1} L_j,$$

wobei wie immer L_j für die j-te Zeile von B_n steht. Man erhält nun die Matrix

$$C_n := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 7 - \frac{3}{4}\cdot(-4)\cdot(n-1) \end{pmatrix}.$$

Weil elementare Zeilenumformungen des verwendeten Typs die Determinante nicht ändern, gilt $\det(A_n) = \det(C_n)$. Weil C_n eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\det(A_n) = \det(C_n) = 4^{n-1}\left(7 - \frac{3}{4}\cdot(-4)\cdot(n-1)\right) = 4^{n-1}\left(7+3(n-1)\right) = 4^{n-1}\left(4+3n\right).$$