Dr. Menny Akka Ginosar 05. Februar 2021

Prüfung in Lineare Algebra I

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB

Bewertungsnummer: ________________

Hinweise zur Notation: Für Mengen A, B gilt $A \subsetneq B$ genau dann, wenn $A \subset B$ und $A \neq B$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}[x]_n = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$. Für Vektorräume V, W über einem Körper K und eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W.

1. (**28 Punkte**) Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

   (1) Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $p\,(2i) = 0$ gilt $p\,(-2i) = 0$. Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit.

   (2) Sei p eine Primzahl und seien $f(x) = x^{p^3} - x$ und $g(x) = x^{p^2} - x$. Dann gilt $f = g$ als Abbildungen in $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$.

   (3) Sei K ein Körper und $a \in K$. Aus $a + a + a + a + a + a = 0$ folgt $a + a = 0$ oder $a + a + a = 0$.

   (4) Sei X eine Menge mit $|X| = n > 3$, sodass n nicht durch 3 teilbar ist. Dann gibt es keine Äquivalenzrelation auf X mit genau drei Äquivalenzklassen.

   (5) Es gibt einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^2$, so dass $U \oplus \mathrm{Sp}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathbb{R}^2$ und $U \oplus \mathrm{Sp}\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathbb{R}^2$ gilt.

   (6) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Basis eines Vektorraums V über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann existiert eine Teilmenge $\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, sodass $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis für U ist.

   (7) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $\{x, y, z\}, \{u, v, z\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann gilt $\dim \mathrm{Sp}\,(x, y, z, u, v) > 3$.

   (8) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(A)$ für alle $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (9) Sei $T\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W über einem Körper K und sei $S \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist auch $T(S)$ linear unabhängig.

   (10) Für jede Matrix A gilt $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}\left(A^T\right)$.

   (11) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ für einen Vektorraum V über einem Körper K und es gelte $\dim V = 4$ und $\mathrm{Rang}(T) = 2$. Dann sind $V/\mathrm{Ker}(T)$ und $\mathrm{Ker}(T)$ isomorphe Vektorräume.

   (12) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(AB) = n \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(BA) = n$.

   (13) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(AB) - \det(A) - \det(B) + \det(A + B) = 0$.

   (14) Für jede Matrix A mit $-A^T = A$ gilt $\det(A) = 0$.

Bitte wenden

Bewertungsnummer: ________________

2. (**16 Punkte**) Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Im}(m_A)$ für $m_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\dim \operatorname{Im}(m_A) =$

   (b) Bestimmen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}).$$

$A^{-1} =$

   (c) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

$\det A =$

   (d) Sei $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_1$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(5,2) = 11 + 22x$ und $T(1,7) = 33 - 11x$. Bestimmen Sie $T(1,4)$.

$T(1,4) =$

3. (**12 Punkte**) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $S_1, S_2 \subseteq V$ endliche Teilmengen mit

$$\operatorname{Sp}(S_2) \subsetneq \operatorname{Sp}(S_1).$$

   Dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

Bewertungsnummer: ________________

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper. Weiter seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^2 - B^2 \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $AB = BA$. Dann ist $A + B \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(c) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ mit $\dim V = n < \infty$ und sei $T\colon V \to \mathbb{F}_2$ eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Dann gilt

$$\left|T^{-1}\left(\{\overline{1}\}\right)\right| = \left|\left\{v \in V \,\middle|\, T(v) = \overline{1}\right\}\right| = 2^{n-1}.$$

4. (**12 Punkte**) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha+1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7-5\alpha & 2+10\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ lösbar ist. Geben Sie für diese Werte alle Lösungen von $A_\alpha x = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$ an.

5. (**14 Punkte**) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

(a) (**2 Punkte**) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Definieren Sie die Dimension von U.

(b) (**6 Punkte**) Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Klarstellung: Beachten Sie, dass es nicht genügt, eine Basis anzugeben, ohne zu zeigen, dass diese in der Tat eine Basis ist.

(c) (**6 Punkte**) Sei nun $\dim V = 9$ und seien $U, W, Z \subseteq V$ Untervektorräume mit

$$\dim U = \dim W = \dim Z = 6.$$

Angenommen, es existiert ein $x \in V$ mit $x \notin W + Z$. Zeigen Sie, dass dann ein $v \in V$ existiert mit $v \neq 0$ und $v \in U \cap W \cap Z$.

6. (**14 Punkte**) (a) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und seien $f_1, f_2, f_3 \in V$ gegeben durch $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = 2^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei weiter $U = \mathrm{Sp}(f_1, f_2, f_3) \subseteq V$.

(i) (**3 Punkte**) Sei $g \in V$ gegeben durch $g(x) = x + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $f \in U$ gilt $f \circ g \in U$. Hierbei bezeichnet $\circ$ die Verkettung von Abbildungen.

(ii) (**3 Punkte**) Sei $T\colon U \to U$ die lineare Abbildung definiert durch $f \mapsto f \circ g$ für g wie in (i). Es ist $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ eine geordnete Basis des Untervektorraums U von V. (Dies müssen Sie nicht zeigen.) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ und begründen Sie Ihre Rechnungen.

(b) (**8 Punkte**) Sei K ein Körper und sei $T\colon K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung mit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für geordnete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von K^2 und $T \circ T = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $b \in K$ gibt mit $b \neq 0$ und $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. (**6 Punkte**) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

die Matrix mit Einträgen 7 auf der Diagonalen und Einträgen 3 sonst. Zeigen Sie

$$\det(A_n) = 4^{n-1}\big(4 + 3n\big).$$

Klarstellung: Folgern Sie die Aussage nicht einfach direkt aus der Aussage einer sehr ähnlichen Übungsaufgabe aus den Serien.