D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | ETH Zürich
Paula Truöl

Ferienserie

Wichtige Hinweise: Auf dieser Serie können Sie keine Punkte bekommen. Die Aufgaben auf dieser Serie sind im Allgemeinen _nicht_ in Form von potentiellen Prüfungsfragen gehalten, dazu wird es die Probeprüfung geben. Das heißt natürlich nicht, dass Prüfungsfragen nicht ähnlich zu Fragen auf dieser Serie sein können. Sie sollten aber nicht das Gefühl haben, etwas zu verpassen, wenn Sie die Aufgaben dieser Ferienserie nicht lösen. Der Stoff dieser Aufgaben wurde schon ausführlich auf den Serien 1-13 behandelt und wir haben hier auch nicht versucht, einen Überblick über den ganzen Stoff der Vorlesung zu geben. Die Serie gibt Ihnen einfach durch ,,im Semester übrig gebliebene Aufgaben" die Möglichkeit, Inhalte der Vorlesung durch noch mehr Übungsaufgaben weiter zu vertiefen.

1. Sei $G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ und $a * b := \max\{a, b\}$. Ist $(G, *)$ eine kommutative Gruppe?

2. Ist $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ ein Untervektorraum? Hier sei $\mathbb{C}^2$ der Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation eines Koordinatenraumes.

3. Sind $+$ und $\cap$ von Untervektorräumen zueinander distributiv, das heißt, gelten für alle Untervektorräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?
$$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$
Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

4. Seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume von V, von denen keiner in einem der anderen enthalten ist. Entscheiden Sie, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, manchmal, oder nie ein Untervektorraum ist.

5. Zeigen Sie, dass
$$U = \left\{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5) \mid \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0 \right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$$
ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

6. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie: Dann ist $\{u, v, w\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u + v, v + w, u + w\}$ linear unabhängig ist.

7. Zeigen Sie, dass die Funktionen (∗)
$$\varphi_n : \mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n + x}$$
für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ linear unabhängig sind.
Tipp: Verwenden Sie, dass ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

8. Sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ die Untervektorräume gegeben durch
$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = 0, c = -b \right\}$$
Bestimmen Sie die Dimensionen von $W_1, W_2, W_1 + W_2$ sowie $W_1 \cap W_2$.

9. Bestimmen Sie den Rang der folgenden rationalen $(n\times n)$-Matrix in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n:

$$B = \big((-1)^{k+\ell}\,(k+\ell-1)\big)_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le n}}$$

10. Für einen Körper K seien Elemente $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n \in K$ gegeben. Wechen Rang kann die Matrix

$$A := (a_i b_j)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(K)$$

haben?

11. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie: Seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$, dann ist

$$\mathrm{Rang}(T_1+T_2) \le \mathrm{Rang}(T_1) + \mathrm{Rang}(T_2)$$

12. Für einen Körper K sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $AX = XA$ für alle $(n\times n)$-Matrizen X. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda I_n$.

13. Seien K ein Körper und $m,n,r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
    (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ hat genau dann Rang $\le r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(K)$ gibt, so dass $C = AB$.
    (b) Ist $\mathrm{Rang}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B) = r$ gelten.

14. Stellen Sie fest, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
    (a) Für einen Körper K, $A \in M_{n\times m}(K)$, $b \in K^n$ und $L = \{x \in K^m \mid Ax = b\}$ gilt

    $$\{x \in K^m \mid Ax = 0\} = \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in L\}.$$

    (b) Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen über einem Körper K und n Unbekannten, sodass alle zugehörigen inhomogenen Gleichungssysteme mindestens eine Lösung haben. Dann haben all diese Gleichungssysteme genau eine Lösung.
    (c) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann sind u, v, w linear abhängig genau dann, wenn $u \in \mathrm{Span}(v,w)$ oder $v \in \mathrm{Span}(u,w)$ oder $w \in \mathrm{Span}(u,v)$ gilt.
    (d) Es gibt keine vom Nullvektor verschiedene Linearkombination $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ der Vektoren

    $$\big(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}\big),\ \big(1,\pi,\pi^2,\pi^3\big) \in \mathbb{R}^4,$$

    welche die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ erfüllt.

15. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A_n = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ als Funktion von n, wobei die Einträge von A für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ definiert sind als

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \le j \\ n+1-j & i > j. \end{cases}$$