D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich

Lösungen zu Serie 1

Geraden und lineare Gleichungssysteme, Ebenen
Abgabe 28.09.2020

Dies sind Lösungsvorschläge zu den Aufgaben auf Serie 1. Oft kann es auch alternative richtige Lösungswege geben. Arbeiten Sie diese Lösungsvorschläge sorgfältig durch und vergleichen Sie sie mit Ihrer eigenen Lösung. Dabei auftretende Fragen können Sie im Rahmen des StudyCenters oder in den Übungsstunden stellen.

1. Fassen Sie $\mathbb{R}^2$ als die xy-Ebene mit den üblichen kartesischen Koordinaten auf. Zeichnen Sie (für jede Teilaufgabe jeweils in dasselbe Koordinatensystem) die Geraden

   (a) $L_i = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x = i\right\}$ für $i \in \{1,2,3\}$.
   Lösung: Die Zeichnung zu den drei Geraden finden Sie in Abbildung 1.

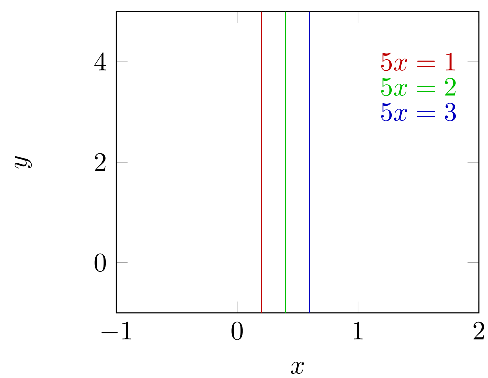


Abbildung 1: Die drei Geraden aus Aufgabe 1(a).

   Für die Parameterdarstellung lösen wir die Gleichung $5x = i$ nach x auf. Es ist also $x = \frac{i}{5}$. Wir erhalten $L_i = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{i}{5} \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{i}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$, siehe auch Abschnitt 0.2.2 in [F].

   (b) $L_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 2\right\}, L_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 18\right\}, L_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 17\right\}$.
   Lösung: Die Zeichnung zu den drei Geraden finden Sie in Abbildung 2. Wir bestimmen

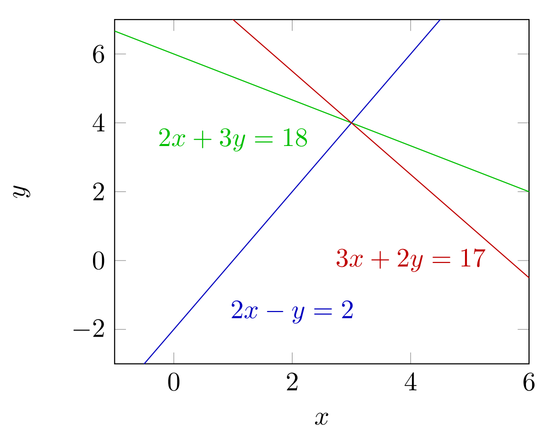


Abbildung 2: Die drei Geraden aus Aufgabe 1(b).

   jeweils eine parametrisierte Form der Geraden.

Wir beginnen mit L_1. Wir wählen die x-Koordinate eines Punktes der Geraden als Parameter t und erhalten

$$y = 2x - 2 = 2t - 2.$$

Damit ist $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t-2 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Für eine Parameterdarstellung von L_2 wählen wir die y-Koordinate als Parameter t. Wir lösen die Gleichung $2x + 3y = 18$ nach x auf und erhalten $x = -\frac{3}{2}y + 9 = -\frac{3}{2}t + 9$. Somit ist $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + 9 \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Für L_3 wählen wir ebenfalls die y-Koordinate als Parameter t. Mit $x = -\frac{2}{3}y + \frac{17}{3} = -\frac{2}{3}t + \frac{17}{3}$ erhalten wir die parametrisierte Form $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t + \frac{17}{3} \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Sei $L = \{v + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $v, w \in \mathbb{R}^2$ eine Gerade in parametrisierter Form und sei $v' \in L$. Zeigen Sie, dass $L = \{v' + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$. (2)

Lösung:

Behauptung: Sei $L' := \{v' + t'w \mid t' \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt $L = L'$.

Beweis. Wir wollen $L = L'$ bzw. $\{v + tw \mid t \in \mathbb{R}\} = \{v' + t'w \mid t' \in \mathbb{R}\}$ zeigen. Dazu zeigen wir $L \subseteq L'$ und $L' \subseteq L$.
Zunächst bemerken wir noch, dass es wegen $v' \in L$ ein (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $v' = v + t_0 w \quad (*)$.
Wir starten mit $L \subseteq L'$. Sei $\mathbf{x} = v + tw \in L$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Wegen $(*)$ gilt $v = v' - t_0 w$ und damit $\mathbf{x} = v + tw = v' - t_0 w + tw = v' + (t - t_0)w$. Somit ist $\mathbf{x} = v' + t'w$ für $t' = t - t_0 \in \mathbb{R}$, also $\mathbf{x} \in L'$. Da wir $\mathbf{x} \in L$ beliebig gewählt hatten, folgt $L \subseteq L'$.
Bleibt noch $L' \subseteq L$ zu zeigen. Sei dazu $\mathbf{x} = v' + t'w \in L'$ für ein $t' \in \mathbb{R}$. Wegen $(*)$ gilt dann $\mathbf{x} = v' + t'w = v + t_0 w + t'w = v + (t' + t_0)w \in L$, also $\mathbf{x} \in L$ und somit $L' \subseteq L$. □

3. Betrachten Sie die folgenden drei linearen Gleichungssysteme: (2)

$$\text{(i)} \begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + y &= -1 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 6y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(iii)} \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

Für jedes System tun Sie Folgendes:

(a) Lösen Sie es.

Lösung:

Wir wollen die Gleichungen Stück für Stück lösen:

i. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhalten wir $x = 4$. Setzen wir dies nun in die zweite Gleichung ein, so folgt $4 + y = -1$ und damit $y = -5$.

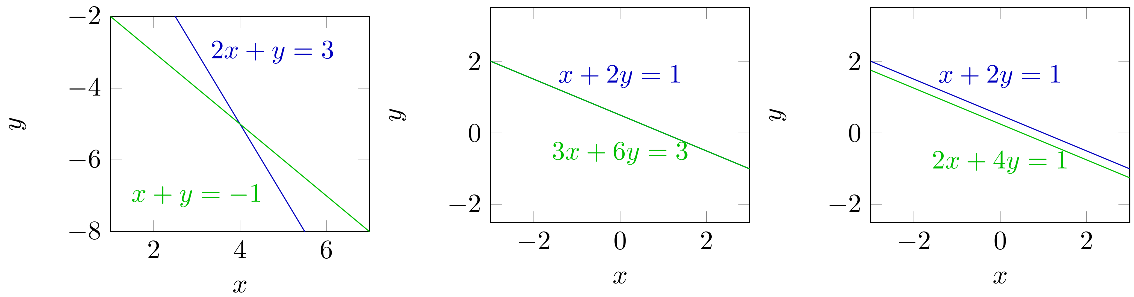
ii. Teilen wir die zweite Gleichung durch drei, so erhalten wir $x + 2y = 1$. Damit sind unsere beiden Gleichungen äquivalent und das lineare Gleichungssystem (ii) hat unendlich viele Lösungen. Wir werden diese Lösungen in Teilaufgabe (d) bestimmen.

iii. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit zwei, so erhalten wir $2x + 4y = 2$. Damit hat das lineare Gleichungssystem (iii) keine Lösung (da $2x + 4y = 1$ laut der zweiten Gleichung).

(b) Zeichnen Sie die Lösungsmenge jeder der beiden Gleichungen jeweils als eine Gerade in der xy-Ebene und finden Sie die Schnittmenge der beiden Geraden.

Lösung: Die Darstellungen der drei linearen Gleichungssysteme finden Sie in Abbildung 3. Die Durchschnittsmenge für das lineare Gleichungssystem (i) ist $\{(4, -5)\}$. Die Durchschnittsmenge für das lineare Gleichungssystem (ii) ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$. Die Durchschnittsmenge für das lineare Gleichungssystem (iii) ist leer, also die leere Menge $\emptyset = \{\}$.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen (a) und (b)?



(a) Das System (i) (b) Das System (ii) (c) Das System (iii)

Abbildung 3: Die linearen Gleichungssysteme aus Aufgabe 8.

Lösung:
Die Durchschnittsmengen aus Teilaufgabe (b) entsprechen genau den Lösungen der linearen Gleichungssysteme aus (a).

(d) Wenn das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, parametrisieren Sie diese durch einen Parameter t.

Lösung:
Es bleibt nun nur noch die Lösungen von Gleichungssystem (ii) etwas genauer zu bestimmen, d.h. die Lösungsmenge der Gleichung $x + 2y = 1$. (Die zweite Gleichung ist äquivalent, siehe (a).) Ist nun $y = t$, so gilt $x = 1 - 2y = 1 - 2t$. Damit ist die Lösungsmenge von Gleichungssystem (ii) gegeben durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - 2t,\ y = t,\ \text{für } t \in \mathbb{R}\right\} = \{(1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Stellen Sie die folgenden Geraden jeweils als die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $ax+by = c$ dar.

(a) $L = \left\{(3, 0) + t\left(\frac{17}{2}, 0\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

Lösung:
Es ist

$$L = \left\{(3, 0) + t\left(\frac{17}{2}, 0\right) \middle| \, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 3 + \frac{17}{2}t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R}\right\}$$

und damit $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$.

(b) $L = \{(4, 3) + t\,(13, 9) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Lösung:
Es ist

$$L = \{(4, 3) + t\,(13, 9) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(4 + 13t, 3 + 9t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

also ist L die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = 4 + 13t, y = 3 + 9t$. Lösen wir die zweite Gleichung nach t auf, erhalten wir $t = \frac{y-3}{9}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$x = 4 + 13t = 4 + 13\left(\frac{y - 3}{9}\right) = \frac{13}{9}y - \frac{1}{3}.$$

Somit ist

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x - \frac{13}{9}y = -\frac{1}{3}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 9x - 13y = -3\right\}.$$

In der nächsten Aufgabe betrachten wir eine Ebene im dreidimensionalen reellen Raum

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definition (0.3.2 in [F])**.** *Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^3$ heißt* Ebene*, wenn es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ gibt, sodass*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\right\}.$$

Auch eine Ebene im Raum kann man noch anders darstellen in parametrisierter Form. Details dazu besprechen Sie in der Übungsstunde am 21.09., können Sie aber auch nachlesen in Abschnitt 0.3.3 in [F].

5. Gegeben sei die Ebene $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 6z = 12\right\}$ im dreidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie E in *parametrisierter Form dar*, d.h. finden Sie Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, sodass $E = \{u + sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. (2)

Lösung:

Es gilt $3x - 5y + 6z = 12 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y + 2$. Wir können zwei Parameter frei wählen, sei also $x = s$ und $y = t$ für $s, t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $z = -\frac{1}{2}s + \frac{5}{6}t + 2$ und somit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf die Fibonacci-Einführung. In der Einführung wurde versucht, einen Überblick über die ganze Vorlesung zu geben. Dementsprechend haben Sie vielleicht nicht alles verstanden. Sie sollten den folgenden Vorlesungen gut folgen können, ohne diese Einführung verstanden zu haben. Trotzdem kann es helfen, die Einführung nochmal zu lesen. In der folgenden Aufgabe können Sie herausfinden, ob sie die Hauptpunkte der Einführung verstanden haben.

6. (a) (Übung 1.13 im Einführungskript) Verifizieren Sie, dass

$$\frac{1}{\varphi - \psi}\mathcal{G}_\varphi + \frac{1}{\psi - \varphi}\mathcal{G}_\psi = \mathcal{F}_{0,1},$$

in dem Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten lösen.

Lösung:

Da wir die Folgen $\mathcal{G}_\varphi = (1, \varphi, \varphi^2, \ldots)$ und $\mathcal{G}_\psi = (1, \psi, \psi^2, \ldots)$ im Sinne der Fibonacci-Einführung gut kennen, möchten wir a_1, a_2 finden mit $\mathcal{F}_{0,1} = a_1\mathcal{G}_\varphi + a_2\mathcal{G}_\psi \quad (*)$, also

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 &= 0 \\ a_1 \cdot \varphi + a_2 \cdot \psi &= 1. \end{aligned}$$

(Überzeugen Sie sich, dass diese zwei Gleichungen für die Gleichheit der Folgen in $(*)$ genügen.) Ziehen wir das φ-fache der ersten Gleichung von der zweiten ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_2 \cdot (\psi - \varphi) &= 1, \end{aligned}$$

also $a_2 = \frac{1}{\psi - \varphi}$. Daraus folgt mit der ersten Gleichung $a_1 = -a_2 = -\frac{1}{\psi-\varphi} = \frac{1}{\varphi-\psi}$, also die Behauptung.

(b) Finden Sie eine Formel für das n-te Folgenglied von $\mathcal{F}_{a,b}$.

Lösung:
Wir stellen zwei Möglichkeiten vor, diese Aufgabe zu lösen.
1. Möglichkeit: Wir gehen vor wie in Teil a) und suchen a_1, a_2 mit $\mathcal{F}_{a,b} = a_1\mathcal{G}_\varphi + a_2\mathcal{G}_\psi$, also

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 &= a \\ a_1 \cdot \varphi + a_2 \cdot \psi &= b. \end{aligned}$$

Ziehen wir das φ-fache der ersten Gleichung von der zweiten ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ a_2 \cdot (\psi - \varphi) &= b - \varphi a, \end{aligned}$$

also $a_2 = \frac{b-\varphi a}{\psi-\varphi}$. Daraus folgt mit der ersten Gleichung $a_1 = a - \frac{b-\varphi a}{\psi-\varphi} = \frac{a\psi-b}{\psi-\varphi}$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{F}_{a,b} = \frac{a\psi - b}{\psi - \varphi}\mathcal{G}_\varphi + \frac{b - \varphi a}{\psi - \varphi}\mathcal{G}_\psi.$$

2. Möglichkeit: Wir erinnern uns, dass $\mathcal{F}_{a,b} = a\mathcal{F}_{1,0} + b\mathcal{F}_{0,1}$ gilt (siehe S. 6 im Einführungsskipt). Wir bemerken, dass $\mathcal{F}_{1,0} = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ aus $\mathcal{F}_{0,1} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ aus Verschiebung entsteht, genauer: Sei $\mathcal{F}_{0,1} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $\mathcal{F}_{1,0} = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, dann gilt $b_0 = 1$ und $b_n = a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Für $n \geq 1$ ist das n-te Folgenglied von $\mathcal{F}_{a,b}$ somit

$$ab_n + ba_n = aa_{n-1} + ba_n = a\frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + b\frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{(a + b\varphi)\,\varphi^{n-1} - (a + b\psi)\,\psi^{n-1}}{\varphi - \psi},$$

wobei wir die explizite Form aus (a) benutzen. das 0-te Folgenglied ist $ab_0 + ba_0 = a$.

Es ist tatsächlich nicht offensichtlich, dass diese zwei Möglichkeiten dieselbe Lösung liefern, darum zeigen wir das nun.
Für $n \geq 1$ hat das n-te Folgenglied in Möglichkeit 1 die Form

$$\frac{a\psi - b}{\psi - \varphi}\varphi^n + \frac{b - \varphi a}{\psi - \varphi}\psi^n = \frac{1}{\psi - \varphi}\left(a\psi\varphi^n - b\varphi^n + b\psi^n - a\varphi\psi^n\right),$$

in Möglichkeit 2 haben wir die Formel

$$\frac{(a + b\varphi)\,\varphi^{n-1} - (a + b\psi)\,\psi^{n-1}}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\psi - \varphi}\left(-a\varphi^{n-1} - b\varphi^n + a\psi^{n-1} + b\psi^n\right),$$

erhalten. Gleichheit der beiden Formeln gilt nun genau dann, wenn

$$a\psi\varphi^n - b\varphi^n + b\psi^n - a\varphi\psi^n = -a\varphi^{n-1} - b\varphi^n + a\psi^{n-1} + b\psi^n.$$

Für $a = 0$ ist dies wahr, für $a \neq 0$ gilt die Gleichheit genau dann, wenn

$$\psi\varphi^n - \varphi\psi^n = -\varphi^{n-1} + \psi^{n-1}.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\varphi^{n-1}(\psi\varphi + 1) - \psi^{n-1}(\varphi\psi + 1) = 0.$$

Wegen $\varphi\psi = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(1 - \sqrt{5}\right) = \frac{1}{4}(1 - 5) = -1$ stimmt diese Gleichung und damit auch die Gleichheit der gefundenen Formeln. Beachte, dass für $n = 0$ beide Formeln a ergeben.