Lösungen zu Serie 7

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Hinweise: Wir haben die Aufgaben dieser Serie bewusst versucht kürzer zu halten, um Ihnen im Rahmen der ,,entschleunigten Woche“ die Möglichkeit zu geben, auch schwierige Themen der vergangenen Wochen zu wiederholen. Demensprechend können Sie dieses Mal auch nur in zwei Aufgaben, nämlich in den Aufgaben 3 und 4 Punkte bekommen. Wie immer erwarten wir dennoch, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Insbesondere sind uns die Aufgaben 7 und 8 wichtig.

1. Überprüfen Sie jeweils, ob die gegbenen Vektoren über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

(a)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Lösung:
Wir bezeichnen die Vektoren mit $v_1, \ldots, v_4$.
Die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $a_1v_1 + \ldots + a_4v_4 = 0$ nur die triviale Lösung $a_1 = \ldots = a_4 = 0$ hat. Durch Anwenden des Eliminationsverfahrens von Gauß oder direktes Ausprobieren erhält man

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Also gilt $a_1v_1 + \ldots + a_4v_4 = 0$ für $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = -1$. Das zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

(b)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\2\\t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\\t^2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

Tipp: Hier ist eine Fallunterscheidung nötig.

Lösung:
Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ und

$$v := a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\2\\t\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}2\\4\\t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + 2a_3\\2a_2 + 4a_3\\t(a_2 + a_3t)\end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Angenommen $v = 0$, dann ist entweder $t = 0$ oder $a_2 = -a_3t$. Falls $t = 0$ ist, dann ist für $a_1 := -2$, $a_2 := -2$, $a_3 := 1$ der Vektor $v = 0_{\mathbb{R}^3}$ eine nicht-triviale Linearkombination und folglich ist für $t = 0$ die Menge

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, t), (2, 4, t^2)\}$$

linear abhängig.

Sei also $v = 0$ und $t \neq 0$. Dann ist $a_2 = -a_3 t$ und $2a_2 = -4a_3$, folglich ist $t = 2$ oder $a_2 = a_3 = 0$. Im Fall $t = 2$ folgt $a_1 = a_2 = -2a_3$ und für $a_3 = 1$, also $a_1 = a_2 = -2$ gilt

$$v = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -4+4 \\ 2(-2+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\{(1,0,0), (0,2,t), (2,4,t^2)\}$$

auch für $t = 2$ linear abhängig.

Falls $t \neq 0, 2$ und $v = 0$, dann folgt aus obiger Argumentation $a_2 = a_3 = 0$ und also auch $a_1 = 0$. Somit ist die Menge

$$\{(1,0,0), (0,2,t), (2,4,t^2)\}$$

für $t \notin \{0, 2\}$ linear unabhängig.

2. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und sei V ein Vektorraum über K. Seien $u, v \in V$ mit $u \neq v$. Zeigen Sie, dass $\{u, v\}$ linear unabhängig ist genau dann, wenn $\{u+v, u-v\}$ linear unabhängig ist.

Lösung:

Wir schreiben 2 für das Element $2 \cdot 1_K = 1_K + 1_K \in K$ und wir schreiben $\frac{1}{2}$ für $2^{-1} \in K$. (Beachten Sie also, dass $2 \in K$ und somit nicht in $\mathbb{Z}$. Wir verwenden also dasselbe Symbol für zwei eigentlich verschiedene Elemente.)

"⇒": Angenommen $\{u, v\}$ sind linear unabhängig und $\alpha, \beta \in K$ mit $0_V = \alpha(u+v) + \beta(u-v)$. Dann gilt

$$0_V = \alpha(u+v) + \beta(u-v) = (\alpha+\beta)u + (\alpha-\beta)v.$$

Also muss wegen der Annahme der linearen Unabhängigkeit $0 = \alpha + \beta = \alpha - \beta$ gelten, also

$$1 \cdot \beta = \beta = -\beta = (-1) \cdot \beta$$

und wenn $\beta \neq 0$, dann impliziert die "Kürzungsregel" ($ba = ca$ genau dann wenn $b = c$ für $a, b, c \in K^\times$, siehe Proposition 1.2), dass $1 = -1 \Leftrightarrow 2 = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Also ist $\beta = 0$ und folglich auch $\alpha = 0$. Dies zeigt, dass $\{u+v, u-v\}$ linear unabhängig ist, wie gewünscht.

"⇐": Angenommen $\{u+v, u-v\}$ sind linear unabhängig und $\alpha, \beta \in K$ mit $0_V = \alpha u + \beta v$. Setze

$$\alpha' := \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{und}$$
$$\beta' := \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(u+v) + \beta'(u-v) &= (\alpha'+\beta')u + (\alpha'-\beta')v \\ &= \frac{1}{2}2\alpha u + \frac{1}{2}2\beta v = \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{u+v, u-v\}$ folgt $0 = \alpha' = \beta'$. Daraus folgt $0 = \alpha' + \beta' = \alpha$ und $0 = \alpha' - \beta' = \beta$ und folglich ist $\{u, v\}$ linear unabhängig.

Bemerkung: In $\mathbb{F}_2$ is $2 = 0$, somit ist 2 nicht invertierbar und wir können α' nicht wie oben definieren. Man sieht aber sofort, dass die Aussage falsch ist, denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1 = -1$ und folglich $u - v = u + v$, also ist $\{u+v, u-v\}$ nie linear unabhängig.

3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Nur für die Entscheidung wahr/falsch bekommen sie keine Punkte, begründen Sie Ihre Entscheidung!

   (a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $0 \neq \lambda \in K$. Dann sind $\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n$ linear unabhängig. (2)

   Lösung:

   Die Aussage ist wahr.

   Beweis: Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1(\lambda v_1) + \ldots + a_n(\lambda v_n) = 0$. Dann gilt (unter Benutzung von (V5)) $(a_1\lambda)v_1 + \ldots + (a_n\lambda)v_n = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ folgt $a_1\lambda = \ldots = a_n\lambda = 0$. Aus der Nullteilerfreiheit von K (Lemma 1.33 (c)) und $\lambda \neq 0$ folgt dann $a_1 = \ldots = a_n = 0$, also sind $\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n$ linear unabhängig. □

   (b) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $w_1, \ldots, w_n \in V$ jeweils linear unabhängig. Dann sind $v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n$ linear unabhängig. (2)

   Lösung:

   Die Aussage ist falsch. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $w_i = -v_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann sind $w_1, \ldots, w_n$ nach Teilaufgabe (a) linear unabhängig, aber $v_1 + w_1 = 0_V, \ldots, v_n + w_n = 0_V$ sind linear abhängig. Dies liegt daran, dass eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, immer linear abhängig ist. Genauer: Seien $v_1, \ldots, v_m, 0_V \in V$. Dann ist $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m + 1 \cdot 0_V = 0_V$ eine nicht-triviale Linearkombination dieser Vektoren.

4. Finden Sie für die Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_2$ jeweils eine Basis $S' \subseteq S$ von $\mathrm{Sp}(S)$, wobei (4)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq K^5.$$

Lösung:

Wir schreiben

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$K = \mathbb{Q}$**:** Bemerke, dass $v_1 = v_3 + v_4$. Folglich ist $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(v_2, v_3, v_4, v_5)$. Wir zeigen, dass $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ linear unabhängig ist. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ mit $0_{\mathbb{Q}^5} = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4 + \delta v_5$, also

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \gamma & + & \delta & = & 0 \\ & & \beta & & & & & = & 0 \\ \alpha & + & & & & & \delta & = & 0 \\ \alpha & + & & & \gamma & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & + & \delta & = & 0 \end{array}$$

Also gelten $\gamma = -\delta$, $\beta = 0$, $\alpha = -\delta$ sowie $\gamma = -\alpha$. Einsetzen der dritten dieser Gleichungen in die vierte Gleichung impliziert $\gamma = \delta$ und dies zusammen mit der ersten liefert $\delta = 0$ und also $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Also ist $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ eine Basis von $\mathrm{Sp}(S)$.

$K = \mathbb{F}_2$**:** Auch hier gilt $v_1 = v_3 + v_4$ und zudem $v_4 = v_2 + v_5$. Folglich ist $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(v_2, v_3, v_5)$. Wir zeigen, dass $\{v_2, v_3, v_5\}$ linear unabhängig ist. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_2$ mit $0_{\mathbb{F}_2^5} = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_5$, also

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & & & = & 0 \\ \alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Also ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und somit ist $\{v_2, v_3, v_5\}$ eine Basis von $\mathrm{Sp}(S)$.

5. Sei $U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid p(6) = 0\}$, wobei $\mathbb{R}[x]_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 4\}$. Finden Sie eine Basis von U. Erweitern Sie diese Basis dann zu einer Basis von $\mathbb{R}[x]_4$.

   Lösung:

   Wir behaupten, dass $\mathcal{B} = \{x-6, x^2-6x, x^3-6x^2, x^4-6x^3\}$ eine Basis von U ist. Um die lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus $\mathcal{B}$ zu zeigen, seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$a_1(x-6) + a_2(x^2-6x) + a_3(x^3-6x^2) + a_4(x^4-6x^3) = 0, \qquad \text{also} \tag{1}$$
$$-6a_1x^0 + (a_1-6a_2)x^1 + (a_2-6a_3)x^2 + (a_3-6a_4)x^3 + a_4x^4 = 0. \tag{2}$$

   Wegen der linearen Unabhängigkeit von x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in $\mathbb{R}[x]_4$ (Beispiel 2.59) folgt

$$\begin{aligned} -6a_1 &= 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, \\ a_1 - 6a_2 &= 0 - 6a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0, \\ a_2 - 6a_3 &= 0 \Leftrightarrow a_3 = 0, \\ a_3 - 6a_4 &= 0 \Leftrightarrow a_4 = 0. \end{aligned}$$

   Also gilt $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ und die Polynome aus $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig.
   Beachten Sie alternativ, dass (1) eine Gleichheit von Polynomen ist, also für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $x = 0$ folgt $-6a_1 = 0$, also $a_1 = 0$. Setzen wir $x = 1, x = -1$ und $x = 2$ ein, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -5a_2 & - & 5a_3 & - & 5a_4 & = & 0 \\ 7a_2 & - & 7a_3 & + & 7a_4 & = & 0 \\ -2a_2 & - & 16a_3 & - & 32a_4 & = & 0. \end{array}$$

   Mit dem Eliminationsverfahren von Gauss können wir dies umformen und zeigen, dass $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ die einzige Lösung ist, und somit die lineare Unabhängigkeit folgern.

   Um zu zeigen, dass U von $\mathcal{B}$ erzeugt wird, sei $p \in U$. Wegen $p(6) = 0$ teilt dann $x - 6$ das Polynom p (Korollar 1.57) und wegen $\deg(p) \leq 4$ gilt also $p(x) = (x-6)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$ für $a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$p(x) = (x-6)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3(x^4-6x^3) + a_2(x^3-6x^2) + a_1(x^2-6x) + a_0(x-6),$$

   also ist p eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$. Weil $p \in U$ beliebig gewählt war, folgt $\mathrm{Sp}(\mathcal{B}) = U$.

   Abschließend behaupten wir, dass $\mathcal{B} \cup \{1\}$ linear unabhängig ist. Wegen $\dim(\mathbb{R}[x]_4) = 5$ (siehe Beispiel 2.81) ist $\mathcal{B} \cup \{1\}$ dann eine Basis von $\mathbb{R}[x]_4$. Wegen Lemma 2.79 genügt es für den Beweis der Behauptung zu zeigen, dass $1 \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{B} = U$ ist. Dies ist wegen der Bedingung $p(6) = 0$ für $p \in U$ aber leicht einzusehen.

6. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:
   (a) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0, \end{array}$$

   (b) $\{0_V\} \subseteq V$ für einen beliebigen Vektorraum V über einem Körper K,
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$,
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauss bekommen wir als Lösungsmenge für dieses Gleichungssystem den eindimensionalen Vektorraum $V := \left\{\left(-\frac{3}{2}z, \frac{5}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$. Eine Basis davon ist beispielsweise der Vektor $(-3, 5, 2)$.

(b) Es gilt $\mathrm{Sp}(\emptyset) = \{0_V\}$ (siehe Bemerkung 2.45). Also ist die leere Menge $\emptyset$ eine Basis von $\{0\}$ und der Vektorraum hat Dimension 0.

Bemerkung:

Der Nullvektor 0_V kann nie in einer Basis enthalten sein, da 0_V nicht linear unabhängig ist.

(c) Sei V der Vektorraum $\left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x + iy = 0\right\}$ über $\mathbb{C}$. Sei $(x, y) \in V$. Dann gilt $x + iy = 0$, also $y = ix$. Deshalb gilt $(x, y) = (x, ix) = x(1, i)$ für jedes $(x, y) \in V$ und wir können jedes $(x, y) \in V$ als Linearkombination des Vektors $(1, i)$ schreiben. Dieser ist linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$ und somit eine Basis von V. Die Dimension dieses Vektorraums über $\mathbb{C}$ ist daher 1. (Die Dimension als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist 2, siehe (d)).

(d) In (c) haben wir gezeigt, dass sich jedes Element in V in der Form $x(1, i), x \in \mathbb{C}$ schreiben lässt. Wenn wir nun $x = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen, gilt

$$x(1, i) = (a + ib)(1, i) = a(1, i) + ib(1, i) = a(1, i) + b(i, -1).$$

Also lässt sich jedes $(x, y) \in V$ als reelle Linearkombination der Vektoren $(1, i)$ und $(i, -1)$ darstellen. Diese beiden sind in V als Vektorraum über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und somit eine Basis. (Angenommen, es gilt $a(1, i) + b(i, -1) = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $(a + ib, ia - b) = (0, 0)$, also $a + ib = ia - b = 0$. Dies impliziert $b = ia \in \mathbb{R}$, also $a = 0$ wegen $i \notin \mathbb{R}$ und damit $a = b = 0$.)
Der Raum ist daher als Vektorraum über $\mathbb{R}$ zweidimensional.

7. In Aufgabe 2 von Serie 6 haben Sie gezeigt, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ für eine beliebige Menge X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ ist. Sei nun $X = \{1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}(X)$ ist.

(b) Sei $n = 3$. Zeigen Sie, dass alle zweielementigen Teilmengen von $X = \{1, 2, 3\}$ keine Basis von $\mathcal{P}(X)$ bilden. Zeigen Sie weiter, dass hingegen $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}(X)$ ist.

Lösung:

Lösungen zu dieser Aufgabe finden Sie in der Datei LösungenSerie7Aufgaben7-8.pdf.

8. Wir betrachen nochmal die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Sei hier $X = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n := \{B \mid B \subseteq \{1, \ldots, n\}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $A_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Untervektorraum ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Benutzen Sie ein Lemma aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass

$$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$ ist. Ist $A = \emptyset$? Falls nein, bestimmen Sie A.

(c) Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $W_n \subseteq V, n \in \mathbb{N}$, Untervektorräume von V mit $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \ldots \subseteq V$. Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$$

ein Untervektorraum von V.

Folgern Sie aus der obigen Aussage, dass

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{P}(X)$ ist. Ist $B = \mathcal{P}(X)$? Falls nein, bestimmen Sie B.

Lösung:

Lösungen zu dieser Aufgabe finden Sie in der Datei LösungenSerie7Aufgaben7-8.pdf.