Lösungen zu Serie 10

Rangsatz, Matrixmultiplikation, Darstellungsmatrizen, Transformationsformel

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(a), 5(b) und 7(c) und (d) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in M_{m\times n}(K)$ und $m_A\colon K^n \to K^m, x \mapsto Ax$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im}(m_A) = \text{Spaltenraum}(A)$ ist.
Tipp: Benutzen Sie Lemma 3.18 und Lemma 3.26 aus dem Skript.
Lösung:
Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basis des Vektorraums K^n. Nach Lemma 3.18 gilt

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ m_A(e_1) & m_A(e_2) & \cdots & m_A(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition des Spaltenraums und Lemma 3.26 folgt daraus

$$\operatorname{Im}(m_A) = \operatorname{Sp}(m_A(e_1), \ldots, m_A(e_n)) = \text{Spaltenraum}(A).$$

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und A eine der beiden folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen für Kern und Bild von m_A und verifizieren Sie die Dimensionsformel aus dem Rangsatz (Satz 3.27).
Lösung:
Sei zunächst $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man $(1, -2, 1)^\top$ als Basis von $\operatorname{Ker}(m_A) = \text{Lös}(A, 0_{K^m})$, vgl. Beispiel 3.20. Nach Teilaufgabe (a) spannen die Spaltenvektoren von A das Bild $\operatorname{Im}(m_A)$ auf, und da je zwei Spalten von A linear unabhängig sind, gilt $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^2$, mit Basis z.B. die ersten beiden Spalten. Es gilt also $\dim \operatorname{Ker}(m_A) + \dim \operatorname{Im}(m_A) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ m_A\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man

$$(1, 0, 0, -1, -1)^\top, (0, 1, -1, -1, -1)^\top$$

als Basis von $\operatorname{Ker}(m_A)$. Die ersten beiden Spaltenvektoren lassen sich jeweils als Linearkombination der letzten drei schreiben, und diese drei sind offensichtlich linear unabhängig. Also bilden die letzten drei Spaltenvektoren eine Basis von $\operatorname{Im}(m_A)$. Es gilt also

$$\dim \operatorname{Ker}(m_A) + \dim \operatorname{Im}(m_A) = 2 + 3 = 5 = \dim \mathbb{R}^5.$$

2. Gegeben seien die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte, wenn sie definiert sind. Erläutern Sie, warum, wenn ein Produkt nicht definiert ist.

(a) AD

(b) $A(2B + 3C)$

(c) DC

(d) $(AB)D$

(e) $A(BD)$

(f) $D^T D$

Bemerkung:

Die Matrixmultiplikation ist ein sehr wichtiges Rechenverfahren der Linearen Algebra. Üben Sie deswegen das Multiplizieren von Matrizen, bis Sie es wirklich gut können. Eine weitere Rechenaufgabe dazu wäre zum Beispiel Aufgabe 1 aus Abschnitt 2.5 im „Übungsbuch zur Linearen Algebra, Aufgaben und Lösungen“ von Hannes Stoppel und Birgit Griese, siehe hier: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-14522-4`. Mithilfe der Website `https://matrixcalc.org/de/` können Sie sich auch selbst noch Matrixprodukte ausdenken und Ihre Rechnungen überprüfen.

Lösung:

Das Produkt AD ist nicht definiert, da die Anzahl der Spalten von A, nämlich 2, ungleich der Anzahl Zeilen von D, nämlich 3, ist. Genauso ist DC nicht definiert. Für die anderen Produkte gilt

$$\begin{aligned}
A(2B+3C) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot 5 & 1\cdot 3 + 3\cdot(-4) & 1\cdot 6 + 3\cdot 4 \\ 2\cdot 5 + (-1)\cdot 5 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-4) & 2\cdot 6 + (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 20 & -9 & 18 \\ 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \\
(AB)D &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 13 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 29 \\ -26 \end{pmatrix}, \\
D^T D &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 17
\end{aligned}$$

und die Assoziativität der Matrixmultiplikation impliziert $A(BD) = (AB)D = \left(\begin{smallmatrix} 29 \\ -26 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Seien K ein Körper, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Es gilt $(AB)^T = B^T A^T$. (2)
   Tipp: Benutzen Sie die Definition der Matrixmultiplikation und der Transponierten.
   Lösung:
   Wir bezeichnen in dieser Aufgabe den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix C mit C_{ij}. Es ist also $A = (A_{ij})$ und $B = (B_{ij})$. Dann gilt nach Definition der Transponierten, nach Definition der Matrixmultiplikation und wegen der Kommutativität der Multiplikation in K
   $$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik}A^T_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \qquad \forall i \in \{1,\ldots,p\}, j \in \{1,\ldots,m\},$$
   also die Behauptung.
   Ein alternativer Beweis ohne neue Notation befindet sich in Abschnitt 2.5.4 in Fischer.
   (b) Falls $m = n$ und A invertierbar ist, dann ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
   Lösung:
   Aus der Invertierbarkeit von $A \in M_{n\times n}(K)$ folgt per Definition und nach Korollar 3.51 die Existenz einer eindeutigen Matrix $A^{-1} \in M_{n\times n}(K)$ mit
   $$AA^{-1} = I_n \quad \text{und} \quad A^{-1}A = I_n.$$
   Daraus folgt mit Teilaufgabe (a)
   $$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n \quad \text{und} \quad A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$
   Also ist $(A^{-1})^T$ die eindeutige Inverse von A^T.

4. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $0 \neq p = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ in $K[x]$ gibt, sodass
   $$p(A) = \sum_{j=0}^{k} a_j A^j = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k = 0$$
   ist. Können Sie eine obere Schranke für $\deg(p)$ angeben, welche nur von n anbhängt?
   Tipp: $M_{n\times n}(K)$ ist endlich-dimensional.

   Lösung:
   Für $1 \leq i, j \leq n$ sei wie in Beispiel 2.53 $E_{ij} = (a_{kl}) \in M_{n\times n}(K)$ die Matrix mit
   $$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = i \text{ und } l = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Dann gilt
   $$M_{n\times n}(K) = \operatorname{Sp}\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$
   und die Matrizen $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ sind linear unabhängig, also eine Basis von $M_{n\times n}(K)$. Also ist $\dim M_{n\times n}(K) = n^2$.
   Dann sind aber nach Korollar 2.87 die (n^2+1) Matrizen $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ linear abhängig, also gibt es $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in K$ nicht alle Null, sodass
   $$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_{n^2} A^{n^2} = 0 \tag{1}$$

ist. Für das Polynom $p := \sum_{j=0}^{n^2} a_j x^j \in K[x]$ gilt nun $p \neq 0$ und wegen (1) auch $p(A) = 0$.

Da wir außer $A \in M_{n\times n}(K)$ keine weiteren Informationen über A benutzt haben, können wir für jedes $A \in M_{n\times n}(K)$ ein Polynom $p \in K[x]$ mit $\deg(p) \leq n^2$ finden, sodass $p(A) = 0$ ist.

Wir werden später sehen, dass wir diese Schranke zu $\deg(p) \leq n$ verbessern können.

5. Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $S\colon V \to W$, $T\colon W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es gilt $\operatorname{Rang}(T \circ S) \leq \min\{\operatorname{Rang}(S), \operatorname{Rang}(T)\}$.

   Lösung:
   Wegen $\operatorname{Im}(T \circ S) \subseteq \operatorname{Im}(T)$, gilt $\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) \leq \dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(T)$. Da die Abbildung
   $$T|_{\operatorname{Im}(S)} : \operatorname{Im}(S) \to \operatorname{Im}(T \circ S)$$
   linear und surjektiv ist, gilt zudem nach dem Rangsatz (Satz 3.27)
   $$\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(S) - \dim \operatorname{Ker}(T|_{\operatorname{Im}(S)}) \leq \dim \operatorname{Im}(S) = \operatorname{Rang}(S)$$
   und damit auch die Aussage.

   (b) Falls T injektiv ist, so gilt $\operatorname{Rang}(T \circ S) = \operatorname{Rang}(S)$. (2)

   Lösung:
   Falls T injektiv ist, so ist
   $$T|_{\operatorname{Im}(S)} : \operatorname{Im}(S) \to \operatorname{Im}(T \circ S)$$
   auch injektiv (wegen $\operatorname{Ker}\left(T|_{\operatorname{Im}(S)}\right) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$) und nach dem Rangsatz gilt
   $$\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(S) - \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(T|_{\operatorname{Im}(S)})}_{=0} = \dim \operatorname{Im}(S) = \operatorname{Rang}(S).$$

   (c) Falls S surjektiv ist, so gilt $\operatorname{Rang}(T \circ S) = \operatorname{Rang}(T)$.

   Lösung:
   Falls S surjektiv ist, so gilt $\operatorname{Im}(T \circ S) = \operatorname{Im}(T)$, also
   $$\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(T).$$

   Tipp: Betrachten Sie $T|_{\operatorname{Im}(S)}$.

6. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $K[x]_n$ aller Polynome mit Koeffizienten in K und Grad $\leq n$.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$T\colon K[x]_n \to K[x]_n, \quad p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei $p'' := (p')'$ ist und $p' = \mathrm{D}(p)$ wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Ableitung von p bezeichnet.

   Lösung:
   Sei wie in Beispiel 3.6
   $$\mathrm{D}\colon K[x] \to K[x]$$
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Seien nun $\lambda, \mu \in K$ und $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, q = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in K[x]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $m \geq n$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\lambda p + \mu q) &= \mathrm{D}\left(\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mu \sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k x^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(\lambda a_k + \mu b_k) x^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{m} k b_k x^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \mu \sum_{k=1}^{m} k b_k x^{k-1} \\
&= \lambda \mathrm{D}(p) + \mu \mathrm{D}(q),
\end{aligned}$$

also ist D linear. Da die Verknüpfung linearer Abbildungen wieder linear ist, ist auch

$$K[x]_n \to K[x]_n, \quad p \mapsto p'' = (p')' = \mathrm{D}(\mathrm{D}(p)) = \mathrm{D}^2(p)$$

linear. Die Linearität der Abbildung $T\colon p \mapsto p'' + p'$ folgt nun aus einer direkten Rechnung oder aus der allgemeineren Aussage, dass die Summe zweier linearer Abbildungen linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$.

Lösung:
Es gilt

$$T\left(x^j\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ j x^{j-1} + j(j-1) x^{j-2} & \text{für } j \geq 2\,. \end{cases}$$

Also ist die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ gleich

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(j\delta_{i,j-1} + j(j-1)\delta_{i,j-2}\right)_{0 \leq i,j \leq n},$$

wobei die Indizierung der Matrix (unüblicherweise) bei 0 beginnt.
Für $n \geq 2$ lässt sich diese Matrix auch schreiben als

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathrm{D}_n\colon K[x]_n \to K[x]_{n-1}, \qquad p \mapsto p',$$

wobei wiederum $p' = \mathrm{D}(p)$ wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Ableitung von p bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie zur Wiederholung die Darstellungsmatrix $[\mathrm{D}_n]_{\mathcal{B}_{n-1}}^{\mathcal{B}_n}$ von D_n bezüglich der Basen $\mathcal{B}_n = (1, x, \ldots, x^n)$ von $K[x]_n$ und $\mathcal{B}_{n-1} = (1, x, \ldots, x^{n-1})$ von $K[x]_{n-1}$, vgl. Beispiel 3.42.

Lösung:
Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren $1, \ldots, x^n$ in der Basis B_{n-1}:

$$\mathrm{D}_n(1) = 0,\ \mathrm{D}_n(x) = 1,\ ,\mathrm{D}_n(x^2) = 2x,\ \ldots,\ \mathrm{D}_n(x^n) = nx^{n-1}.$$

Folglich ist

$$[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{B}_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) Sei nun $\mathcal{C}_n = (1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+\dots+x^n)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_n$ eine Basis von $K[x]_n$ ist.

Lösung:

Wegen $x^i = (1+\dots+x^i) - (1+\dots+x^{i-1})$ wird $K[x]_n$ durch $\mathcal{C}_n$ erzeugt. Da $\mathcal{C}_n$ aus $n+1 = \dim K[x]_n$ Vektoren besteht, sind diese nach Satz 2.85 auch linear unabhängig.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{C}_n}$ und $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{B}_n}$. (2)

Lösung:

Aus der Gleichung $x^i = (1+\dots+x^i) - (1+\dots+x^{i-1})$ aus (b) erhalten wir unmittelbar die Transformationsmatrizen

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{C}_n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie die Matrix $[D_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}}$. (2)

Lösung:

Nach Korollar 3.61 gilt

$$\begin{aligned} [D_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}} &= \left[\mathrm{Id}_{K[x]_{n-1}}\right]^{\mathcal{B}_{n-1}}_{\mathcal{C}_{n-1}} [D_n]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{B}_{n-1}} \left[\mathrm{Id}_{K[x]_n}\right]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{B}_n} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & n-1 & -1 \\ 0 & & \dots & & 0 & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:

Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.