Lösungen zu Serie 12

Quotientenräume, Determinante, Permutationen

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3, 4(a), 6(b) und 8 bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Jeder k-dimensionale Untervektorraum U von K^n ist Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0$$

für eine Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$. Was ist der minimale Wert, den m annehmen kann?

Tipp: Verwenden Sie zur Lösung den Quotientenraum K^n/U und die kanonische Quotientenabbildung

$$\pi_U : K^n \to K^n/U.$$

Lösung:

Die Aufgabe lässt sich unter Verwendung des Quotientenraums K^n/U lösen: Nach Korollar 3.124 gilt $\dim K^n/U = \dim K^n - \dim U = n-k$, also ist $K^n/U \cong K^{n-k}$. Sei $f : K^n/U \to K^{n-k}$ ein Isomorphismus. Dann hat wegen Proposition 3.122 die Komposition

$$K^n \xrightarrow{\pi_U} K^n/U \xrightarrow{f} K^{n-k}$$

als Kern genau den Untervektorraum $U \subseteq K^n$. Die Abbildung ist (z.B. in der Standardbasis) beschrieben durch eine Matrix $A \in M_{(n-k)\times n}(K)$ und somit ist U genau Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0\,.$$

Alternative Lösung: Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von U. Gesucht sind Zeilenvektoren $\alpha \in K^n$ mit

$$\alpha v_i = 0 \qquad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Äquivalent: gesucht sind Zeilenvektoren $\alpha \in K^n$ mit

$$\alpha B = 0,$$

wobei $B := (v_1|\dots|v_k)$ die $(n \times k)$-Matrix ist, die als Spalten die k Basisvektoren von U hat.

Das System $\alpha B = 0$ ist äquivalent zu $B^T \alpha^T = 0$, (transponiere beide Seiten der Gleichung), und der Lösungsraum dieses Gleichungssystems ist $\mathrm{Ker}(B^T)$. Zudem wissen wir, dass

$$\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}\left(B^T\right) = k$$

ist und aus der Dimensionsformel aus dem Rangsatz (Satz 3.27) folgt

$$\dim \mathrm{Ker}\left(B^T\right) = n - k =: r.$$

Sei $\{w_1, \cdots, w_r\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}\left(B^T\right)$ und A die Matrix, die $w_1, \cdots, w_r$ als Zeilen hat. Dann gilt: $\mathrm{Rang}(A) = r$ und $\mathrm{Ker}(A) = U$, denn: Falls $x \in U$, dann ist $Ax = 0$, d.h. $U \subseteq \mathrm{Ker}(A)$, und da zudem $\dim \mathrm{Ker}(A)) = n - r = k = \dim U$, ist $U = \mathrm{Ker}(A)$.

Für den zweiten Teil der Aufgabe behaupten wir, dass der minimale Wert von m gleich $r = n - k$ ist. In der Tat, wenn es nicht so wäre, dann wäre $m < r$, und somit $\mathrm{Rang}(A) < r$. Dann folgt aus der Dimensionsformel wiederum, dass

$$\dim \mathrm{Ker}(A) > k\,,$$

was aber ein Widerspruch ist, denn $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim U = k$. Also haben wir gezeigt, dass der minimale Wert $m = r$ ist.

2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir wenden Zeilenoperationen auf A an, um A in die Form einer oberen Dreiecksmatrix zu bringen. Bei Zeilenoperationen vom Typ $L_j + \lambda L_i$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bleibt die Determinante unverändert, beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinate ihr Vorzeichen, vgl. (D7) bzw. (D6). Also gilt

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{L_3+L_2\to L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{L_4+L_3\to L_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wobei wir für die letzte Gleichheit drei Vertauschungen vorgenommen haben: wir haben erst die Zeilen 1 und 2, dann die Zeilen 2 und 3 und dann die Zeilen 3 und 4 vertauscht, sodass sich das Vorzeichen dreimal geändert hat. Die letzte Matrix ist nun eine obere Dreiecksmatrix, also gilt nach Proposition 4.9

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4,$$

also $\det(A) = (-1)^3 4 = -4$.

Ebenso berechnet man $\det(B) = 0$ und $\det(C) = 111$. Alternativ kann man für $\det(B)$ direkt erkennen, dass die erste Spalte der Matrix B eine Linearkombination der dritten und fünften Spalte ist. Für die Matrix B gilt daher $\mathrm{Rang}(B) < 5$ und somit $\det(B) = 0$ nach Korollar 4.10.

3. Sei K ein Körper. Berechne in Abhängigkeit von $a, b, c, d, e \in K$ die Determinante der Matrix (2)

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen in der gegebenen Matrix erhält man

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & a-b & a-c & a-d & a-e \\ 0 & 0 & b-c & b-d & b-e \\ 0 & 0 & 0 & c-d & c-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-e \\ a & b & c & d & e\,. \end{pmatrix}$$

Durch einmaliges zyklisches Permutieren der Zeilen, das heisst, durch Verschieben der untersten Zeile an die oberste Stelle, entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonaleinträge ist. Da wir dafür vier Vertauschungen von Zeilen vorgenommen haben (4. und 5. Zeile vertauscht, dann 3. und 4., dann 2. und 3., dann 1. und 2.), erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} = \det(A') = (-1)^4 a(a-b)(b-c)(c-d)(d-e) = a(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)\,.$$

4. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) über dem Körper $\mathbb{R}$. Ist A invertierbar? (2)

   Lösung:

   Für die Lösung dieser Aufgabe benutzen wir den Entwicklungssatz von Laplace. Stattdessen könnten wir auch wie in den vorherigen zwei Aufgaben Zeilenumformungen anwenden.
   Wir entwickeln zunächst nach der ersten Spalte:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bei der linken Determinante entwickeln wir noch zweimal nach der jeweils letzten Spalte und erhalten $(-3) \cdot 3 \cdot (-9) = 81$, wobei wir die Formel für die Determinante einer 2×2-Matrix benutzen. Bei der rechten Determinante entwickeln wir nach der ersten Spalte und benutzen zweimal die Regel von Sarrus, das ergibt $1 \cdot (-27) - 2 \cdot (6 - 4 - 9)$, also

$$\det(A) = 81 + 2(-27 + 14) = 55\,.$$

   Daraus folgt wegen Korollar 4.10, dass A über $\mathbb{R}$ invertierbar ist.

   (b) über dem Körper $\mathbb{F}_5$. Ist A invertierbar?

   Lösung:

   Es gilt $\det(A) = 55 = 0 \in \mathbb{F}_5$. Daraus folgt wegen Korollar 4.10, dass A über $\mathbb{F}_5$ nicht invertierbar ist.

5. Seien K ein Körper, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix und $u, v \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$ Spaltenvektoren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Es gilt

$$\det\left(I_n + uv^T\right) = 1 + v^T u.$$

   Lösung:

   Die Aussage ist korrekt für $u = 0$. Weiter betrachten wir den Fall $u = e_1$, der erste Standardbasisvektor von K^n. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$. Dann ist $B = I_n + e_1 v^T = (b_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen

$$b_{11} = 1 + v_1\,, \qquad b_{ii} = 1 \quad \text{für alle } i > 1$$

und folglich

$$\det(I_n + e_1 v^T) = 1 + v_1 = 1 + v^T e_1. \tag{1}$$

Für beliebiges $u \neq 0$ sei $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, dass $Qu = e_1$. Um Q zu finden, können wir u zu einer Basis $\mathcal{B}$ des K^n ergänzen und dann eine Matrix $P \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bilden aus den Basisvektoren aus $\mathcal{B}$. Diese Matrix ist die Basiswechselmatrix $[\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{B}}$ mit $\mathcal{E}_n$ der Standardbasis von K^n, also invertierbar, und es gilt $u = Pe_1$ und $Q := P^{-1}$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft. Wegen $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$ für $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gilt nun

$$\begin{aligned}\det\left(I_n + uv^T\right) &= \det\left(Q\left(I_n + uv^T\right)Q^{-1}\right) = \det\left(I_n + e_1 v^T Q^{-1}\right)\\ &= 1 + v^T Q^{-1} e_1 = 1 + v^T Q^{-1} Q u = 1 + v^T I_n u = 1 + v^T u,\end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit der zweiten Zeile die Gleichheit aus (1) benutzt.

(b) Es gilt

$$\det\left(S + uv^T\right) = \det(S)\left(1 + v^T S^{-1} u\right).$$

Lösung:
Wir wenden Teilaufgabe (a) auf $S^{-1}u$ an und multiplizieren unter Benutzung des Determinanten-Multiplikationssatzes mit $\det(S)$, also

$$\begin{aligned}&\det(I_n + S^{-1}uv^T) = 1 + v^T S^{-1} u\\ &\Rightarrow \det\left(S + uv^T\right) = \det(S)\det(I_n + S^{-1}uv^T) = \det(S)\left(1 + v^T S^{-1} u\right).\end{aligned}$$

6. (a) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) \in \mathbb{Z}$ ist.

Bemerkung:
Allgemeiner könnten wir die Determinante als Abbildung $\det\colon M_{n\times n}(R) \to R$ für einen beliebigen kommutativen Ring R mit Eins (vgl. Definition 1.24) auffassen, siehe Abschnitt 3.2.8 in Fischer. Sie werden dies auch noch in der Vorlesung sehen.

Lösung:
Wir betrachten A als Matrix in $M_{n\times n}(K)$ für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$. Nach der Leibniz-Definition der Determinante ist dann

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

Da alle Einträge von A ganze Zahlen sind, sind auch die Summanden dieser Summe ganze Zahlen (allgemeiner: wenn die Einträge von $A \in M_{n\times n}(K)$ für einen Körper K tatsächlich alle Elemente eines kommutativen Rings mit Eins $R \subseteq K$ sind, dann sind die Summanden in (2) Elemente des Rings). Nun muss aber auch die Summe in (2) eine ganze Zahl sein, also folgt die Behauptung.

Bemerkung:
Genauso könnte man für einen kommutativen Ring R mit Eins statt $\mathbb{Z}$ argumentieren. Andererseits wäre es besser, direkt zu uberprüfen, dass man det durch die Leibniz-Formel als Abbildung $M_{n\times n}(R) \to R$ definieren könnte, welche die Axiome (D1)-(D3) erfüllt. So würde man sich nicht auf Ringe beschränken, die Teilmengen eines Körpers sind, wie wir es oben für $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ getan haben. Tatsächlich ist es nicht so schwierig zu überprüfen, dass wir den Existenzbeweis der Determinante über die Leibniz-Formel auch über einem kommutativen Ring mit Eins statt einem Körper führen könnten, da wir im Beweis die zusätzlichen Eigenschaften eines Körpers nicht benutzen.

(b) Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeigen Sie ohne die Determinante (2) auszurechnen, dass auch

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.

Lösung:

Wir addieren (1000×(1. Spalte) + 100×(2. Spalte) + 10×(3. Spalte)) zur 4. Spalte. Da sich die Determinante durch diese Spaltenoperationen nicht ändert (Zeilenoperationen von diesem Typ $L_j + \lambda L_i$ ändern die Determinante nicht und es gilt $\det(A^T) = \det(A)$), erhalten wir

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Eintrag in der letzten Spalte durch 106 teilbar ist, gilt

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2014 \\ 1 & 4 & 8 & 1484 \\ 3 & 7 & 1 & 3710 \\ 6 & 9 & 9 & 6996 \end{pmatrix} = 106 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 4 & 8 & a_2 \\ 3 & 7 & 1 & a_3 \\ 6 & 9 & 9 & a_4 \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_4$. Da nach Teilaufgabe (a) die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegt, folgt die Aussage.

7. Stellen Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

als Produkt von Transpositionen dar und bestimmen Sie das Signum von σ.

Lösung:

Sei $\sigma \in S_6$ die gegebene Permutation. Wir gehen vor wie in Fischers Beweis des Lemma aus 3.2.2. Wir bemerken zunächst, dass $\sigma(1) = 6 \neq 1$ gilt. Sei τ_1 die Transposition in S_6, die 1 und 6 vertauscht. Dann gilt

$$\sigma_1 := \tau_1 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei nun τ_2 die Transposition in S_6, die 2 und 5 vertauscht. Es gilt

$$\sigma_2 := \tau_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Als letztes sei $\tau_3 \in S_6$ die Transposition, die 4 und 6 vertauscht. Dann gilt

$$\tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma = \tau_3 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{S_6},$$

also $\sigma = (\tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1)^{-1} = \tau_1^{-1} \cdot \tau_2^{-1} \cdot \tau_3^{-1} = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3$. Das Signum von σ ist somit $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^3 = -1$.

Sie können alle Aufgaben dieser Serie lösen, ohne den Entwicklungssatz von Laplace zu benutzen. Für die nächste Aufgabe könnte es Ihnen allerdings helfen, diesen Satz zu verwenden.

8. Seien a und b Elemente eines Körpers K und für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die $(n \times n)$-Matrix (2)

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

$$\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big).$$

Lösung:

Sei B_n die $(n \times n)$-Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Es gilt $\det(B_n) = (b-a)^{n-1}a$.

Beweis: Wir verwenden Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B_1 = (a)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von B_{n+1} erhält man die Matrix

$$B'_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von B'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(B_{n+1}) = \det(B'_{n+1}) = (b-a)\det(B_n) \overset{\text{IH}}{=} (b-a)^n a,$$

wobei IH eine Abkürzung für Induktionshypothese ist. Dies schließt den Induktionsschritt ab und beweist somit die Behauptung. $\square$

Behauptung: Es gilt $\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$.

Beweis: Wir verwenden wiederum Induktion über n. Wegen $A_1 = (b)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von A_{n+1} erhält man die Matrix

$$A'_{n+1} := \begin{pmatrix} b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von A'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\begin{aligned}\det(A_{n+1}) &= (b-a)\det(A_n) + (-1)(a-b)\det(B_n)\\ &\overset{\text{IH}}{=} (b-a)^n\big(b+(n-1)a\big) + (b-a)^n a\\ &= (b-a)^n(b+na).\end{aligned}$$

Die Aussage gilt also auch für $n+1$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ wie behauptet. $\square$

Alternativ kann man wie folgt vorgehen: Durch Addieren der ersten $n-1$ Spalten zur letzten Spalte, erhält man eine Matrix, deren letzte Spalte dem Spaltenvektor $(b+(n-1)a)\cdot(1,\ldots,1)^T$ entspricht. Durch Herausziehen des Faktors $(b+(n-1)a)$ und Subtrahieren des a-fachen der letzten Spalte von allen anderen Spalten erhält man eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen auf den Diagonalen $b-a,\ldots,b-a,1$. Es folgt

$$\det(A_n) = (b+(n-1)a)\det\begin{pmatrix} b-a & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b-a & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}\,.$$

9. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:

Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.