D-MATH
Dr. Menny Akka Ginosar
Paula Truöl

Lineare Algebra I

HS 2020
ETH Zürich

Lösungen zu Serie 8

Durchschnitt, Summen, direkte Summen, Dimensionsformel

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 1(a), 3, 5(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen, außer die mit einem $(*)$ deklarierte Aufgabe 7(d), die wir als besonders schwierig einschätzen.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und $w \in V$.

   (a) Zeigen Sie, dass (2)
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1) = n - 1$$
   gilt.

   Lösung:
   Die Menge $\mathcal{B} = \{v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1\}$ erzeugt $\mathrm{Sp}(\mathcal{B})$. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathrm{Sp}(\mathcal{B})$ ist. Dies zeigt nach der Definition der Dimension die Behauptung.
   Seien nun $a_2, a_3, \ldots, a_n \in K$ mit $a_2(v_2 - v_1) + a_3(v_3 - v_1) + \ldots + a_n(v_n - v_1) = 0$. Also gilt $(-a_2 - a_3 - \ldots - a_n)v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots a_nv_n = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n \in V$ folgt daraus
   $$-a_2 - a_3 - \ldots - a_n = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0,$$
   also die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$.

   (b) Zeigen Sie, dass
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w) \geq n - 1$$
   gilt.
   Tipp: Benutzen Sie (a), um $n-1$ linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ zu finden.

   Lösung:
   Wegen $v_j - v_1 = (v_j + w) - (v_1 + w)$ gilt $v_j - v_1 \in \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ für alle $j \in \{2, \ldots, n\}$, also $\mathrm{Sp}(v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1) \subseteq \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$. Mit Proposition 2.91 und Teilaufgabe (a) folgt daraus
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w) \geq \dim \mathrm{Sp}(v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1) = n - 1.$$

   (c) Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich $w \notin \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann
   $$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w) = n$$
   gilt.

   Lösung:
   Es gelte $w \notin \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ und Lemma 2.80 sind dann $v_1, \ldots, v_n, w \in V$ linear unabhängig. Wir behaupten, dass auch $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ linear unabhängig sind. Seien dazu $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1(v_1 + w) + \ldots + a_n(v_n + w) = 0$. Es gilt also $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n + (a_1 + \ldots + a_n)w = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n, w$ folgt dann $a_1 = \ldots = a_n = a_1 + \ldots + a_n = 0$. Somit sind $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ linear unabhängig, also eine Basis von $\mathrm{Sp}(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$. Aus der Definition der Dimension folgt die Behauptung.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Zeilenraum und den Spaltenraum von A.

Lösung:

Mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1\to L_3]{L_2-L_1\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-\frac{1}{7}S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} & 0 \\ 4 & \frac{3}{7} & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei schreiben wir $S_2 - S_1 \to S_2$ für die Spaltenoperation, bei der wir die erste Spalte von der zweiten abziehen etc.

Aus der Zeilenstufenform von A in der ersten Zeile lesen wir ab, dass die Vektoren $(1,2,3)$ und $(0,-3,-6)$ nach Korollar 2.99 eine Basis des Zeilenraums von A bilden. Da sich der Spaltenraum durch Spaltenumformungen nicht ändert, bilden die Vektoren $(1,4,7)$ und $\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},0\right)$ eine Basis des Spaltenraums von A. Alternativ hätten wir auch Zeilenumformungen auf der Transponierten A^T von A durchführen können.

Schließlich hätten wir uns die Arbeit mit den Spaltenoperationen durch die Anwendung der "Methode für Faule" aus der Vorlesung aber auch sparen können. Korollar 2.104 impliziert nämlich, dass die Vektoren $(1,4,7)$ und $(2,5,8)$ eine Basis von $\mathrm{SR}(A)$ bilden.

(b) Bestimmen Sie Zeilenrang(A) und Spaltenrang(A).

Lösung:

Aus (a) und der Definition der Dimension folgt direkt, dass

$$\mathrm{Zeilenrang}(A) = \dim \mathrm{ZR}(A) = \mathrm{Spaltenrang}(A) = \dim \mathrm{SR}(A) = 2$$

gilt.

3. Gegeben seien die Untervektorräume (2)

$$U := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $U \cap V$.

Lösung:

Wir suchen ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungen alle Vektoren des Durchschnitts $U \cap V$ beschreiben. Ein Element des Durchschnitts $w \in U \cap V$ ist sowohl in U als auch in V enthalten und kann deshalb auf zwei Arten als Linearkombination geschrieben werden:

$$a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Der Vektor $(a,b,c,d)^T$ ist deshalb eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ für $x \in \mathbb{R}^4$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Wir wenden das Gauss-Verfahren auf die Matrix A an und erhalten die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 + 2L_1 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen sehen wir, dass der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ durch $\operatorname{Sp}\left((1,1,3,-2)^T\right)$ gegeben ist. Zurückübersetzt auf unser ursprüngliches Problem erhalten wir mit $a = 1$ und $b = 1$ (bzw. $c = 3$ und $d = -2$) die Gleichung $U \cap V = \operatorname{Sp}\left((1,1,-2)^T\right)$. Weil $(1,1,-2)^T$ nicht der Nullvektor, also linear unabhängig ist, und den Durchschnitt erzeugt, ist $\left\{(1,1,-2)^T\right\}$ eine Basis.

4. Gegeben seien die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U &:= \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \,\middle|\, \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\right\}, \\ V &:= \left\{(\alpha, \dots, \alpha) \in K^n \;\middle|\; \alpha \in K\right\} \end{aligned}$$

von K^n für einen Körper K, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Hinweis: Beachten Sie, dass je nach Charakteristik des Körpers K dort $n \cdot 1 = 0$ oder $n \cdot 1 \neq 0$ gilt. Achten Sie darauf, diese Fälle zu unterscheiden, wenn Sie eine Basis bzw. die Dimension von $U \cap V$ und $U + V$ bestimmen.

Lösung:

Für uns ist $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, also $0 \notin \mathbb{N}$. Für $n = 0$ würde $U = V = U \cap V = U + V = \{0\}$ gelten. Jeder dieser Unterräume hat die Basis $\emptyset$ und folglich die Dimension 0.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

Jedes Element $(\alpha, \dots, \alpha) \in V$ ist ein Vielfaches des Vektors $v := (1, \dots, 1)$. Wegen $v \neq 0$ ist $\{v\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis von V. Insbesondere ist $\dim(V) = 1$.

Weiter liegen die $(n-1)$ Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad v_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, -1)$$

in U und sind linear unabhängig. (Für $n = 1$ bedeutet dies einfach, dass 0 dieser Vektoren in U liegen.) Um dies zu zeigen, seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ mit

$$a_1 v_1 + \ldots + a_{n-1} v_{n-1} = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{n-1} - a_{n-2}, -a_{n-1}) = 0.$$

Dann folgt induktiv $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$.
Insbesondere ist also $\dim(U) \geq n - 1$. Wegen $(1, 0, \dots, 0) \notin U$ ist aber $\dim(U) < \dim(K^n) = n$ und wir schließen $\dim(U) = n - 1$ wegen Proposition 2.91. Da die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von U ist, bilden sie nach Satz 2.85 eine Basis von U.

Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist in K, gilt $v = (1, \dots, 1) \notin U$. In diesem Fall gilt $U \cap V = \{0\}$, also ist $\emptyset$ eine Basis von $U \cap V$ und $\dim(U \cap V) = 0$. Wegen $v \notin U = \operatorname{Sp}(v_1, \dots, v_{n-1})$ und der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_{n-1}$ folgt außerdem aus Lemma 2.80, dass die Vektoren

$$v, v_1, \dots, v_{n-1} \in U \cup V \subseteq \operatorname{Sp}(U \cup V) = U + V$$

linear unabhängig sind. Das zeigt $\dim(U + V) \geq n$. Da aber $\dim(U + V) \leq \dim(K^n) = n$ ist, schließen wir, dass $U + V$ Dimension n hat und die Vektoren $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $U + V$ bilden.

Wenn $n \cdot 1 = 0$ ist in K, gilt $v = (1, \dots, 1) \in U$, also auch $V = \operatorname{Sp}(v) \subseteq U$. In diesem Fall ist also $U \cap V = V$ und $U + V = U$. Für beide Untervektorräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt.

5. Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Summen von Vektorräumen über $\mathbb{R}$ direkt sind oder nicht, also ob $U+V=U\oplus V$ mit U,V den jeweils angegebenen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^4$ gilt.

   (a) $\operatorname{Sp}\big((1,0,0,1),(2,3,-3,9)\big)+\operatorname{Sp}\big((1,3,-4,7),(2,0,1,3)\big)$, (2)

   Lösung:

   Es gilt
   $$(1,0,0,1)+(2,3,-3,9)=(3,3,-3,10)=(1,3,-4,7)+(2,0,1,3)\,,$$
   somit ist der Durchschnitt der beiden angegebenen Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ nicht-trivial und die Summe nicht direkt.

   (b) $\operatorname{Sp}\big((1,2,3,4),((-3,4,2,8)\big)+\operatorname{Sp}\big((-3,9,1,3)\big)$,

   Lösung:

   Nach Bemerkung 2.88 im Skript sind die drei Vektoren $(1,2,3,4),(-3,4,2,8),(-3,9,1,3)$ linear unabhängig genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax=0$ nur die triviale Lösung $x=0$ hat, wobei $A\in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ die Matrix ist, welche als Spalten die Vektoren hat. Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens lösen wir dieses lineare Gleichungssystem:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-3&0\\2&4&9&0\\3&2&1&0\\4&8&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3-3L_1\to L_3\\L_4-4L_1\to L_4}]{L_2-2L_1\to L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-3&0\\0&10&15&0\\0&11&10&0\\0&20&15&0\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2\to L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-3&0\\0&2&3&0\\0&11&10&0\\0&20&15&0\end{array}\right)$$
   $$\xrightarrow[L_4-10L_2\to L_4]{L_3-\frac{11}{2}L_2\to L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-3&0\\0&2&3&0\\0&0&-\frac{13}{2}&0\\0&0&-15&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-3&0\\0&2&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

   Dieses Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung $x=0\in\mathbb{R}^3$, die Vektoren sind also linear unabhängig. Die Summe der beiden angegebenen Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ ist somit direkt, denn jeder Vektor in der Summe lässt sich eindeutig als Linearkombination eines Vektors in $\operatorname{Sp}\big((1,2,3,4),((-3,4,2,8)\big)$ und eines Vektors in $\operatorname{Sp}\big((-3,9,1,3)\big)$ darstellen.

   (c) $\operatorname{Sp}\big((1,2,3,4),(-3,-6,-9,-12)\big)+\operatorname{Sp}\big((-3,4,2,8),(-3,9,1,3)\big)$.

   Lösung:

   Offensichtlich sind $(1,2,3,4)$ und $(-3,-6,-9,-12)$ linear abhängig; das bedeutet jedoch nur, dass der erste Vektorraum eindimensional ist. Die Summe der beiden Vektorräume ist dennoch direkt, genau wie in Teil (b).

6. Seien V und W Vektorräume über einem Körper K.

   (a) Zeigen Sie, dass $V\times W$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum, genannt der *Produktraum* von V und W, ist.

   Lösung:

   Wir überprüfen die Vektorraumaxiome. Nach Aufgabe 2(b) von Serie 4 ist $V\times W$ mit der Verknüpfung
   $$+:\big(V\times W\big)\times\big(V\times W\big)\to V\times W:\quad (v_1,w_1),(v_2,w_2)\mapsto(v_1+v_2,w_1+w_2)$$
   eine Gruppe. Es gelten also (V1)-(V3). Insbesondere ist $(0_V,0_W)$ das neutrale Element der Addition in $V\times W$.

   (V4) Die Kommutativität der Addition in $V\times W$ folgt direkt aus der Kommutativität der Addition in V und W.

   (V5) Seien $a,b\in K,(v,w)\in V\times W$. Wegen (V5) für V,W gilt dann
   $$a\cdot\big(b\cdot(v,w)\big)=a\cdot(b\cdot v,b\cdot w)=\big(a\cdot(b\cdot v),a\cdot(b\cdot w)\big)=\big((a\cdot b)\cdot v,(a\cdot b)\cdot w\big)=(a\cdot b)\cdot(v,w).$$

(V6) Wegen (V6) für V, W gilt $1 \cdot (v,w) = (1 \cdot v, 1 \cdot w) = (v,w)$ für alle $(v,w) \in V \times W$.

(V7) Seien $a \in K, (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot ((v_1,w_1) + (v_2,w_2)) &= a \cdot (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = \big(a \cdot (v_1 + v_2), a \cdot (w_1 + w_2)\big) \\ &= (a \cdot v_1 + a \cdot v_2, a \cdot w_1 + a \cdot w_2) = (a \cdot v_1, a \cdot w_1) + (a \cdot v_2, a \cdot w_2) \\ &= a \cdot (v_1, w_1) + a \cdot (v_2, w_2), \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung der zweiten Zeile die Eigenschaft (V7) von V und W benutzt.

(V8) Seien $a_1, a_2 \in K, (v,w) \in V \times W$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \cdot (v,w) &= \big((a_1 + a_2) \cdot v, (a_1 + a_2) \cdot w)\big) = (a_1 \cdot v + a_2 \cdot v, a_1 \cdot w + a_2 \cdot w) \\ &= (a_1 \cdot v, a_1 \cdot w) + (a_2 \cdot v, a_2 \cdot w) = a_1 \cdot (v,w) + a_2 \cdot (v,w) \end{aligned}$$

wegen (V8) für V und W.

(b) Zeigen Sie, dass $V \times \{0\}$ und $\{0\} \times W$ Untervektorräume von $V \times W$ sind.
Lösung:
Wir überprüfen, dass $V \times \{0\}$ ein Untervektorraum ist.

(UVR1) $V \times \{0\}$ ist nicht leer, da $(0_V, 0_W) \in V \times \{0\} = V \times \{0_W\}$ enthalten ist.

(UVR2) Seien $(v_1, 0), (v_2, 0) \in V \times \{0\}$. Dann gilt

$$(v_1, 0) + (v_2, 0) = (v_1 + v_2, 0 + 0) = (v_1 + v_2, 0) \in V \times \{0\}.$$

(UVR3) Seien $a \in K, (v, 0) \in V \times \{0\}$. Dann gilt wegen Lemma 2.2(d)

$$a \cdot (v, 0) = (a \cdot v, a \cdot 0) = (a \cdot v, 0) \in V \times \{0\}.$$

Analog zeigt man, dass $\{0\} \times W$ ein Untervektorraum von $V \times W$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$V \times W = \big(V \times \{0\}\big) \oplus \big(\{0\} \times W\big)$$

gilt.
Lösung:
Wir müssen zeigen, dass die beiden Untervektorräume

$$V \times \{0\}, \qquad \{0\} \times W$$

den Vektorraum $V \times W$ erzeugen und trivialen Schnitt haben. Sei hierzu $(v,w) \in V \times W$. Nach Definition der Addition in $V \times W$ gilt

$$(v,w) = (v,0) + (0,w) \in \big(V \times \{0\}\big) + \big(\{0\} \times W\big),$$

also da $(v,w) \in V \times W$ beliebig gewählt war auch $(V \times \{0\}) + (\{0\} \times W) = V \times W$.
Nehmen wir nun an, dass $(v,w) \in \big(V \times \{0\}\big) \cap \big(\{0\} \times W\big)$. Aus $(v,w) \in V \times \{0\}$ folgt $w = 0$ und analog folgt $v = 0$ aus $(v,w) \in \{0\} \times W$, also gilt

$$\big(V \times \{0\}\big) \cap \big(\{0\} \times W\big) = \{0\}$$

und somit ist die Summe direkt.

Man nennt $V \times W$ auch die *äußere direkte Summe* von V und W, um sie von der *„inneren“ direkten Summe* von Untervektorräumen zu unterscheiden, die sich innerhalb eines festen Vektorraums abspielt.

Die äußere Summe von Untervektorräumen kann immer gebildet werden, die innere Summe $V + W$ von Untervektorräumen V, W eines Vektorraums U ist hingegen oft nicht direkt, denn es gilt nicht unbedingt $V \cap W = \{0\}$.
Noch eine Bemerkung zur Dimension: Es gilt $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$. Falls $V + W$ eine „innere" direkte Summe $V \oplus W$ ist, so stimmt die Dimension von $V \times W$ mit $\dim(V \oplus W)$ überein.

7. (a) Seien die zwei Untervektorräume (2)

$$U = \mathrm{Sp}\left(\{x^2 + x^3 + x^4 + x^5, x + x^5 + x^7, x^7 + x^8, x^2 + x^6, x^4 + x^7\}\right),$$
$$V = \mathrm{Sp}\left(\{1, x, x^2, x^3, x^4\}\right)$$

von $\mathbb{Q}[x]_8 = \{p \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(p) \leq 8\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $U \cap V \neq \{0\}$ ist.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Dimension von U bzw. V. Wir behaupten, dass die Vektoren

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5,\ x + x^5 + x^7,\ x^7 + x^8,\ x^2 + x^6,\ x^4 + x^7 \tag{1}$$

bzw. $1, x, x^2, x^3, x^4$ jeweils linear unabhängig sind und damit eine Basis von U bzw. V bilden.
Um dies zu zeigen, müssen wir für die Vektoren aus (1), die U aufspannen, überprüfen, dass die Gleichung

$$a_1(x^2 + x^3 + x^4 + x^5) + a_2(x + x^5 + x^7) + a_3(x^7 + x^8) + a_4(x^2 + x^6) + a_5(x^4 + x^7) = 0$$

für $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Q}$ nur die triviale Lösung $a_1 = \ldots = a_5 = 0$ hat. Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung

$$a_2 x + (a_1 + a_4)x^2 + a_1 x^3 + (a_1 + a_5)x^4 + (a_1 + a_2)x^5 + a_4 x^6 + (a_2 + a_3 + a_5)x^7 + a_3 x^8 = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $x, x^2, \ldots, x^8$ in $\mathbb{Q}[x]_8$ ($1, x, \ldots, x^8$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}[x]_8$ (vgl. Beispiele 2.53 und 2.70) zusammen mit Lemma 2.66), folgt daraus

$$a_2 = a_1 + a_4 = a_1 = a_1 + a_5 = a_1 + a_2 = a_4 = a_2 + a_3 + a_5 = a_3 = 0,$$

also insbesondere $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ und damit auch $a_5 = 0$. Die Vektoren aus (1) bilden also eine Basis von U.
Da die Vektoren $1, x, \ldots, x^8$ eine Basis von $\mathbb{Q}[x]_8$ bilden (vgl. Beispiele 2.53 und 2.70), sind auch die Vektoren $1, x, x^2, x^3, x^4$ wegen Lemma 2.66 linear unabhängig, also eine Basis von V.
Es gilt also $\dim U = \dim V = 5$.
Nun gilt nach der Dimensionsformel (Proposition 2.107 (3) im Skript)

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Wegen $\dim \mathbb{Q}[x]_8 = 9$ und $U + V \subseteq \mathbb{Q}[x]_8$ ist nach Proposition 2.91 $\dim(U + V) \leq 9$, also

$$\dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \leq 9.$$

Mit $\dim(U) = \dim(V) = 5$ folgt $\dim(U \cap V) \geq 5 + 5 - 9 = 1$, also $U \cap V \neq \{0\}$.
Alternativ könnte man auch ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]_8$ angeben, welches in $U \cap V$ liegt und nicht das Nullpolynom ist. Zum Beispiel ist

$$0 \neq (x^2 + x^3 + x^4 + x^5) - (x + x^5 + x^7) + (x^4 + x^7) = -x + x^2 + x^3 + 2x^4 \in U \cap V.$$

(b) Seien U, V Untervektorräume des $\mathbb{C}^6$ der Dimension 4. Zeigen Sie, dass es zwei Vektoren in $U \cap V$ gibt, so dass keiner der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.

Lösung:
Nach der Dimensionsformel (Proposition 2.107 (3) im Skript) gilt

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 4 + 4 - \dim(U + V) = 8 - \dim(U + V).$$

Wegen $U + V \subseteq \mathbb{C}^6$ und $\dim \mathbb{C}^6 = 6$ gilt nach Proposition 2.91 $\dim(U + V) \leq 6$, also

$$\dim(U \cap V) = 8 - \dim(U + V) \geq 8 - 6 = 2.$$

Also gibt es zwei Vektoren $v, w \in U \cap V$, die linear unabhängig sind, insbesondere ist keiner der Vektoren v und w ein Vielfaches des anderen.

(c) Seien $X_1, X_2 \subseteq \{1, 2, \dots, 9\}$ zwei Teilmengen mit $|X_1| = 4$, $|X_2| = 7$ und $|X_1 \cap X_2| = 3$. Wir betrachten $U = \mathcal{P}(X_1)$, $V = \mathcal{P}(X_2)$ als Untervektorräume des Vektorraums $\mathcal{P}(\{1, \dots, 9\})$ über $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie $\dim(U + V)$.

Lösung:
Nach Aufgabe 7(a) von Serie 7 ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Analog kann man zeigen, dass die Menge aller einelementigen Teilmengen einer endlichen Menge X eine Basis von $\mathcal{P}(X)$ ist (vgl. Beispiel 2.53 aus dem Skript). Also gilt $\dim U = 4$, $\dim V = 7$ und $\dim U \cap V = 3$. Nach der Dimensionsformel (Proposition 2.107 (3) im Skript) folgt daraus

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 4 + 7 - 3 = 8.$$

Bemerkung:
In Aufgabe 7(a) von Serie 7 haben Sie gezeigt, dass U, V Vektorräume sind. Wegen $U, V \subseteq \mathcal{P}(\{1, \dots, 9\})$ müssen U, V also Untervektorräume von $\mathcal{P}(\{1, \dots, 9\})$ sein (vgl. Bemerkung 2.8).

(d) Seien die zwei Untervektorräume (∗)

$$U = \left\{ A \in M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7) \mid A \cdot \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$V = \mathrm{Sp}\left(\left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix} \right\} \right)$$

von $M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $U + V = M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)$ ist.
Tipp: Zeigen Sie zunächst $\dim U = 4$, $\dim V = 4$ und $\dim U \cap V = 2$.

Lösung:
Wir behaupten, dass $\dim U = 4$ gilt, weil

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

eine Basis von U ist. Um die lineare Unabhängigkeit dieser Matrizen zu zeigen, betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & a_1 \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = 0_{M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \overline{6}(a_1 + a_2) & \overline{1}a_1 & \overline{1}a_2 \\ \overline{6}(a_3 + a_4) & \overline{1}a_3 & \overline{1}a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{F}_7$. Diese Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\overline{6}(a_1 + a_2) = 0,\ a_1 = a_2 = 0,\ \overline{6}(a_3 + a_4) = 0,\ a_3 = a_4 = 0.$$

Also ist die einzige Lösung die triviale Lösung und die Matrizen aus (2) sind linear unabhängig.
Sei nun $A = (a_{ij}) \in U$. Dann gilt per Definition von U die Gleichung

$$A \cdot \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1}a_{11} + \overline{1}a_{12} + \overline{1}a_{13} \\ \overline{1}a_{21} + \overline{1}a_{22} + \overline{1}a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

also

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} = \overline{0} &\Leftrightarrow a_{12} + a_{13} = -a_{11} = \overline{6}a_{11} \qquad \text{und} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = \overline{0} &\Leftrightarrow a_{22} + a_{23} = -a_{21} = \overline{6}a_{21}. \end{aligned}$$

Wir können nun die Variablen $a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}$ frei wählen und erhalten die Matrizen aus (2) als Lösungen der Gleichung (3), wenn wir je eine dieser Variablen als $\overline{1}$ und die anderen als $\overline{0}$ wählen. Die Matrizen aus (2) spannen also den Lösungsraum von (3) bzw. U auf.
Um die letzte Behauptung zu zeigen, könnten wir auch ,,einfach" A als Linearkombination der Matrizen aus (2) darstellen. Es gilt

$$\overline{6}a_{12} + \overline{6}a_{13} = \overline{6}(a_{12} + a_{13}) = \overline{6}(\overline{6}a_{11}) = \overline{1}a_{11} = a_{11}$$

und $\overline{6}a_{22} + \overline{6}a_{23} = a_{21}$, also

$$\begin{aligned} &a_{12} \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{6}a_{12} + \overline{6}a_{13} & \overline{1}a_{12} & \overline{1}a_{13} \\ \overline{6}a_{22} + \overline{6}a_{23} & \overline{1}a_{22} & \overline{1}a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Also spannen die Matrizen aus (2) den Untervektorraum U auf.
Seien nun

$$A_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix}.$$

Dann sind $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in V$ linear abhängig, denn

$$\overline{0}A_1 + A_2 + \overline{6}A_3 + A_4 + \overline{0}A_5 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{6} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{6} & \overline{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $A_4 = -A_2 - \overline{6}A_3 = \overline{6}A_2 + A_3 \in \mathrm{Sp}(A_1, A_2, A_3, A_5)$. Außerdem sind A_1, A_2, A_3, A_5 linear unabhängig, also eine Basis von V. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_5 = 0_{M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)},$$

so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{1}a_1 + \overline{1}a_2 + \overline{1}a_3 + \overline{1}a_4 &= 0 \\ \overline{0}a_1 + \overline{0}a_2 + \overline{1}a_3 + \overline{2}a_4 &= 0 \\ \overline{6}a_1 + \overline{6}a_2 + \overline{0}a_3 + \overline{3}a_4 &= 0 \\ \overline{6}a_1 + \overline{1}a_2 + \overline{1}a_3 + \overline{4}a_4 &= 0 \\ \overline{0}a_1 + \overline{0}a_2 + \overline{1}a_3 + \overline{5}a_4 &= 0 \\ \overline{1}a_1 + \overline{6}a_2 + \overline{0}a_3 + \overline{6}a_4 &= 0, \end{aligned}$$

welches nur die triviale Lösung $a_1 = \ldots = a_4 = 0$ hat. Dies kann man mit dem Gauß-Verfahren überprüfen, worauf wir hier aber verzichten. Damit gilt $\dim V = \dim \mathrm{Sp}(A_1, A_2, A_3, A_5) = 4$.

Weiter wird $U \cap V$ von denjenigen Basisvektoren von U bzw. V aufgespannt, welche in U und in V liegen. Es gilt $A_1, A_2 \in U \cap V$, aber $A_3, A_4 \notin U$. (Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = 3A_1 + 3A_2, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = 4A_1 + 3A_2 \in U \cap V,$$
$$\begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \notin V.)$$

Also ist A_1, A_2 eine Basis von $U \cap V$ und $\dim U \cap V = 2$.
Mit der Dimensionsformel gilt nun

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 4 + 4 - 2 = 6.$$

Wegen $U + V \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)$ und $\dim(M_{2\times 3}(\mathbb{F}_7)) = 6$ folgt daraus mit Proposition 2.91 die Behauptung.

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:
Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.