D-MATH
Dr. Menny Akka Ginosar
Paula Truöl

Lösungen zu Serie 9

Komplement, Rang, lineare Abbildungen, Kern und Bild

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 2(b), 5(b), 6(a) und 7(a) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen. Besonders Aufgabe 7 ist uns sehr wichtig, Aufgabe 8 könnten Sie aus Zeitgründen auch weglassen.

1. Betrachten Sie den Untervektorraum

$$U := \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie eine Basis eines Komplements von U in $\mathbb{R}^4$, d.h. eines Untervektorraums V von $\mathbb{R}^4$ mit $U \oplus V = \mathbb{R}^4$ (vgl. Definition 2.113 aus dem Skript).

Lösung:

Wir bezeichnen die Vektoren, die U aufspannen, mit v_1 und v_2. Seien $v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Dann sind $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig, denn die Gleichung $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ mit $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$ hat nur die triviale Lösung $a_1 = \ldots = a_4 = 0$. Die folgenden Zeilenumformungen zeigen nämlich, dass das Gleichungssystem $Ax = 0$ mit der Matrix A, die als Spalten die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ hat, nur die triviale Lösung hat (vgl. Bemerkung 2.88):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[L_4 - L_2 \to L_4]{L_3 + 2L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[L_1 - L_2 \to L_1]{L_3 - 2L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Mit $V := \mathrm{Sp}(v_3, v_4)$ gilt also $U + V = \mathrm{Sp}(U \cup V) = \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_4) = \mathbb{R}^4$. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume (Proposition 2.107 (3) im Skript) oder direkt unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ folgern wir $U \cap V = \{0\}$ bzw. $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Also ist V ein Komplement von U in $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren v_3, v_4 sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis von V.

2. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass der *Rang* einer Matrix A auf zwei Arten definiert werden kann: einerseits als Anzahl der Pivots einer Matrix in Zeilenstufenform, welche aus A durch Zeilenoperationen entstanden ist; andererseits als Zeilenrang(A) bzw. Spaltenrang(A).

   (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

      (i) über $\mathbb{R}$,

(ii) über $\mathbb{F}_2$.

Lösung:

Es gilt $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1{+}1\end{pmatrix}$, wobei die letzte Matrix aus A durch die Zeilenumformungen $L_2 - L_1 \to L_2$, $L_3 + L_2 \to L_3$ entstanden ist.

(i) Für $K = \mathbb{R}$ ist $\mathrm{rang} A = 3$.

(ii) Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $\mathrm{rang} A = 2$.

(b) Bestimmen Sie den Rang der reellen Matrix (2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a\\ -2 & -1 & a & 1\end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir bringen B in Zeilenstufenform:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a\\ -2 & -1 & a & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-L_1\to L_3\\ L_4+2L_1\to L_4}]{L_2-L_1\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a+1\\ 0 & 1 & a+6 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+L_2\to L_3]{L_4+L_2\to L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a\\ 0 & 0 & a+1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -5 & -1\\ 0 & 0 & a+1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & a(a+3)\end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\mathrm{rang}(A) = \begin{cases} 3, & \text{falls } a = 0,\ a = -3 \text{ oder } a = -1\\ 4, & \text{sonst}\end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie den Rang der rationalen $n{\times}n$-Matrix

$$C = (k\ell)_{k,\ell=1,\dots,n}$$

in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Sei $c_{kl} := kl$ für $k, l = 1, \dots, n$, sodass $C = (c_{kl})_{k,l=1,\dots,n}$. Sei $C' = (c'_{kl})_{k,l=1,\dots,n}$ die Matrix, die aus C entsteht, indem man für jedes $k = 2, \dots, n$ das k-fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile subtrahiert. Dann gilt

$$c'_{kl} = \begin{cases} c_{kl} = l & \text{falls } k = 1\\ c_{kl} - kc_{1l} = kl - kl = 0 & \text{falls } k > 1\,.\end{cases}$$

Daher hat die Matrix C' genau eine nicht verschwindende Zeile (die erste) und somit Rang 1. Da C' durch elementare Zeilenoperationen aus C entstanden ist, hat C' denselben Rang wie C. Also folgt $\mathrm{rang}(C) = 1$.

3. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.
Betrachten Sie dabei die Vektorräume $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ in den Teilaufgaben (a)-(d) wie üblich als Vektorräume über $\mathbb{R}$. Fassen Sie in Teilaufgabe (e) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auf. (Dies ist also ebenfalls ein Koordinatenraum K^n über K für $K = \mathbb{C}$, $n = 1$ (vgl. Beispiel 2.3 im Skript).)

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,

(d) $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$,

(e) $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto \bar{z}$.

Lösung:

Die Abbildungen g und Id aus (b) bzw. (d) sind linear. Die Abbildung g ist nämlich von der Form $g(x) = Ax$ für eine Matrix $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^2$ und die Linearität folgt damit aus Beispiel 3.12. Die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}\colon V \to V$ für einen beliebigen Vektorraum V über einem Körper K ist immer linear (vgl. Beispiel 3.5), also auch hier als Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Abbildungen in den Teilaufgaben (a) und (e) sind nicht linear. Am schnellsten sieht man die Nicht-Linearität einer Abbildung oft durch Betrachten des Bildes des Nullvektors. Dieses ist bei der Abbildung in (a) verschieden von Null, es gilt nämlich $f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Daher ist die Eigenschaft $f(0) = 0$ nicht erfüllt und diese Abbildung ist nicht linear (vgl. Proposition 3.14 (2)).
Für die Abbildung k aus Teilaufgabe (e) gilt zwar $k(0) = 0$, aber wegen

$$ik(i) = i\bar{i} = -i^2 = 1 \neq -1 = k(i^2)$$

ist die Homogenität nicht erfüllt, also k nicht linear.

Bemerkung:

In Teilaufgabe (e) von Aufgabe 6 werden Sie sehen, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ linear ist, wenn $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefasst wird.

Die Abbildung h aus (c) ist nicht linear, falls $b \neq 0$, denn dann gilt

$$h(x) + h(y) = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b = h(x + y) + b \neq h(x + y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Falls $b = 0$ ist, so ist h linear. Die obige Rechnung zeigt die Additivität von h in diesem Fall und wegen $h(\lambda x) = a\lambda x = \lambda(ax) = \lambda h(x)$ für alle $\lambda, x \in \mathbb{R}$ gilt auch die Homogenität.

Bemerkung:

Im Fall $b = 0$ ist h bijektiv für $a \neq 0$ und die Nullabbildung für $a = 0$.

4. Seien die folgenden Abbildungen $T\colon K^n \to K^m$ für einen Körper K gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildungen linear sind, indem Sie eine Matrix A der richtigen Dimension finden, sodass $T(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$ gilt.

(a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1, 0)$,

Lösung:

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(b) $T\colon \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1)$,

Lösung:

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{F}_5^3$.

(c) $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$,

Lösung:

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

5. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Sei $T \colon V \to W$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann T genau dann linear ist, wenn

$$T(v_1 - \lambda v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2)$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gilt.

Lösung:

"⇒": Falls T linear ist, dann gilt wegen der Additivität und der Homogenität von T

$$\begin{aligned} T(v_1 - \lambda v_2) &= T(v_1 + (-\lambda) v_2) = T(v_1) + T((-\lambda) v_2) \\ &= T(v_1) + (-\lambda) T(v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2) \end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in K$.

"⇐": Für $v_1, v_2 \in V$ gilt $v_1 + v_2 = v_1 - (-1) v_2$, und folglich nach Annahme

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1 - (-1) v_2) = T(v_1) - (-1) T(v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

und ähnlich ist $\lambda v_1 = 0_V - (-\lambda) v_1$ für $\lambda \in K, v_1 \in V$ und folglich

$$T(\lambda v_1) = T(0_V) - (-\lambda) T(v_2) = 0_W + \lambda T(v_2) = \lambda T(v_2)$$

wegen Proposition 3.14 (2). Also ist T linear.

(b) Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $W' \subseteq W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie dass dann (2)

$$T^{-1}(W') := \{ v \in V \mid T(v) \in W' \}$$

ein Untervektorraum von V ist.

Lösung:

Da wegen (UVR1') $T(0_V) = 0_W \in W'$ ist, gilt $0_V \in T^{-1}(W') \neq \emptyset$. Seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(W')$ und $\lambda \in K$. Dann ist nach Teilaufgabe (a) wegen der Linearität von T

$$T(v_1 - \lambda v_2) = T(v_1) - \lambda T(v_2) \in W'$$

und folglich $v_1 - \lambda v_2 \in T^{-1}(W')$. Für die Aussage $T(v_1) - \lambda T(v_2) \in W'$ haben wir hier die äquivalente Charakterisierung eines Untervektorraums aus Aufgabe 3 (a) von Serie 6 benutzt. Wiederum diese Aufgabe zeigt nun, dass $T^{-1}(W')$ ein Untervektorraum ist.

(c) Sei $T \colon V \to W$ eine Abbildung und nehmen Sie an, dass für ein $w \in W \setminus \{0_W\}$ die Menge $T^{-1}(\{w\})$ ein Untervektorraum von V ist. Zeigen Sie, dass T nicht linear ist.

Lösung:
Da $T^{-1}(\{w\})$ ein Untervektorraum von V ist, ist $0_V \in T^{-1}(\{w\})$, also gilt $T(0_V) = w \neq 0_W$. Somit ist die Eigenschaft $T(0) = 0$ einer linearen Abbildung (vgl. Proposition 3.14 (2)) verletzt und die Abbildung T nicht linear.

6. Untersuchen Sie die folgenden linearen Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie jeweils Kern und Bild. Wenn Sie unsicher sind, überzeugen Sie sich zunächst, dass die Abbildungen auch wirklich linear sind. Alle Vektorräume in dieser Aufgabe sind als Vektorräume über $\mathbb{R}$ aufzufassen.

(a) $f_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, -x - 2y/3)$, (2)

Lösung:
Da im Bild von f_a die zweite Koordinate genau $\left(-\frac{1}{3}\right)$-mal der ersten Koordinate ist, ist das Bild von f_a gegeben durch

$$\mathrm{Im}(f_a) = \left\{ \left(u, -\frac{u}{3}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in \mathbb{R} \right\},$$

da sich jedes $u \in \mathbb{R}$ als $3x + 2y$ schreiben lässt. Wegen $\mathrm{Im}(f_a) \neq \mathbb{R}^2$ (z.B. ist $(1, 1) \notin \mathrm{Im}(f_a)$) ist f_a nach Proposition 3.19 also nicht surjektiv. Die Abbildung ist auch nicht injektiv, da der Kern

$$\mathrm{Ker}(f_a) = \left\{ \left(v, -\frac{3v}{2}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in \mathbb{R} \right\}$$

mehr als nur den Nullvektor enthält.

Bemerkung:
Die Linearität von f_a lässt sich leicht überprüfen. Es gilt

$$f_a(\lambda(x, y)) = f_a(\lambda x, \lambda y) = (3\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x - 2\lambda y/3) = \lambda(3x + 2y, -x - 2y/3) = \lambda f_a(x, y)$$

und

$$\begin{aligned} f_a(x, y) + f_a(u, v) &= (3x + 2y, -x - 2y/3) + (3u + 2v, -u - 2v/3) \\ &= (3(x + u) + 2(y + v), -(x + u) - 2(y + v)/3) \\ &= f_a(x + u, y + v) = f_a((x, y) + (u, v)). \end{aligned}$$

für alle $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $f_b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$,

Lösung:
Das Bild von f_b ist offensichtlich ganz $\mathbb{R}$ (wieso?), also ist f_b surjektiv. Der Kern, das heißt die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x + y = 0$ gilt, ist die Gerade $\{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Mehrere Punkte werden also auf Null abgebildet und somit ist f_b wegen Proposition 3.19 nicht injektiv.

(c) $f_c \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(1)$,

Lösung:
Für $a \in \mathbb{R}$ gilt für das Polynom $p(x) = ax \in \mathbb{R}[x]$, dass $f_c(p) = p(1) = a$, also ist f_c surjektiv und $\mathrm{Im}(f_c) = \mathbb{R}$. Allerdings ist f_c nicht injektiv, da zum Beispiel $f_c(x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$ gilt und $x^2 - x$ ist nicht das Nullpolynom in $\mathbb{R}[x]$. Der Kern von f_c besteht genau aus den Polynomen, die 1 als Nullstelle besitzen.

Bemerkung:
Zur Linearität dieser Abbildung: Die Auswertung eines Polynoms an der Stelle 1 ist genau die Summe der Koeffizienten und es ist nicht schwierig (nur vielleicht etwas mühsam) zu zeigen, dass dies in der Tat linear ist.

(d) $f_d \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto D(p) = p'$, wobei D wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Differentiation bezeichnet.

Lösung:
Da
$$D\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$
und der Vektorraum der Polynome durch Monome x^n erzeugt wird – es gilt $\mathbb{R}[x]=\mathrm{Sp}(1,x,x^2,x^3,\ldots)$ – folgt, dass f_d surjektiv ist, d.h. $\mathrm{Im}(f_d)=\mathbb{R}[x]$. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv: konstante Polynome haben Ableitung 0 und bilden den Kern.

(e) $f_e\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \bar{z}$. Achtung: Wir betrachten hier $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lösung:
Die Abbildung ist bijektiv und hat somit Kern $\{0\}$ und Bild $\mathbb{C}$. Die Surjektivität folgt dabei aus $f_e(\bar{z})=\bar{\bar{z}}=z$, die Injektivität aus $\bar{z}=0\Leftrightarrow z=0$.

Bemerkung:
Die Abbildung f_e ist im Unterschied zur Abbildung k aus Aufgabe 3 (e) linear, denn es gilt
$$\lambda f_e(x+iy)=\lambda\overline{(x+iy)}=\lambda(x-iy)=\overline{\lambda(x+iy)}=f_e(\lambda(x+iy))\qquad \text{für alle } \lambda\in\mathbb{R}, x+iy\in\mathbb{C},$$
wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen benutzen, dass $\lambda\in\mathbb{R}$. Die Homogenität hängt hier also entscheidend davon ab, dass wir $\lambda f_e(z)=f_e(\lambda z)$ für $\lambda\in\mathbb{R}$ (und $z\in\mathbb{C}$) prüfen müssen. Auch $f_e(z_1)+f_e(z_2)=f_e(z_1+z_2)$ für $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ lässt sich leicht nachprüfen.

7. Seien V,W Vektorräume über einem Körper K,

(a) Seien $T\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$ injektiv und $S\subseteq V$. Beweisen Sie (2)
$$S \text{ ist linear unabhängig} \Leftrightarrow T(S) \text{ ist linear unabhängig.}$$

Lösung:

"⇒": Angenommen S ist linear unabhängig. Seien $v_1,\ldots,v_k\in S$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in K$ so, dass
$$\lambda_1T(v_1)+\cdots+\lambda_kT(v_k)=0_W$$
gilt und sodass $T(v_1),\ldots,T(v_k)$ paarweise verschieden sind (dies ist wegen der Injektivität von T dazu äquivalent, dass $v_1,\ldots,v_k\in S$ paarweise verschieden sind). Dann folgt aus der Linearität von T und Proposition 3.14 (a), dass
$$0_W=\lambda_1T(v_1)+\cdots+\lambda_kT(v_k)=T(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k).$$
Da T injektiv ist, folgt $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k=0_V$ und wegen der linearen Unabhängigkeit von S also $\lambda_i=0$ für alle $1\le i\le k$. Das zeigt, dass $T(S)=\{w\in W\mid \exists v\in S: w=T(v)\}$ linear unabhängig ist.

"⇐": Angenommen $T(S)$ ist linear unabhängig. Seien $v_1,\ldots,v_k\in S$ paarweise verschieden und $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in K$ mit
$$0_V=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k.$$
Da T linear und injektiv ist, sind $T(v_1),\ldots,T(v_k)\in T(S)$ paarweise verschieden und
$$0_W=T(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)=\lambda_1T(v_1)+\cdots+\lambda_kT(v_k).$$
Aus der linearen Unabhängigkeit von $T(S)$ folgt $\lambda_i=0$ für alle $1\le i\le k$ und folglich ist S linear unabhängig.

Bemerkung:
Die Menge S bzw. $T(S)$ darf hier auch unendlich sein. Nach Definition 2.59 ist eine unendliche Menge linear unabhängig, wenn jede nichtleere endliche Teilmenge linear unabhängig ist. Da wir jeweils k beliebig gewählt haben, haben wir die lineare Unabhängigkeit jeweils für beliebe nichtleere endliche Teilmengen von $T(S)$ bzw. S gezeigt. (Im Fall $|T(S)| = n$ bzw. $|S| = n$ würde es jeweils genügen, $k = n$ zu betrachten.)

(b) Seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass T genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $T(v_1), \dots, T(v_n)$ eine Basis von W ist.

Lösung:

"$\Leftarrow$": Sei $T(v_1), \dots, T(v_n)$ eine Basis von W, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig und spannen ganz W auf. Dann ist T dank der Linearität surjektiv: Für $w \in W$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so dass (mit Proposition 3.14 (1)) $w = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$ gilt, also $w \in \mathrm{Im}(T)$. Gleichzeitig ist T auch injektiv: Für $v \in V$ gibt es eindeutige $\mu_1, \dots \mu_n$ mit $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, also gilt $T(v) = T(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = \mu_1 T(v_1) + \dots + \mu_n T(v_n)$, wiederum mit Proposition 3.14 (1). Da $T(v_1), \dots, T(v_n)$ linear unabhängig sind, ist $T(v) = 0$ genau dann wenn $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, also genau dann, wenn $v = 0$.

"$\Rightarrow$": Falls T ein Isomorphismus ist, so ist T surjektiv, also gibt es für $w \in W$ ein $v \in V$ mit $T(v) = w$. Weil $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so dass (mit Proposition 3.14 (1)) $w = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$ gilt, also spannen die Vektoren $T(v_1), \dots, T(v_n)$ ganz W auf. Als Isomorphismus ist T auch injektiv, d.h. $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ und $0 = T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$. Dies wiederum bedeutet, dass die Bilder $T(v_1), \dots, T(v_n)$ linear unabhängig sind. Somit ist $T(v_1), \dots, T(v_n)$ eine Basis von W.

(c) Seien $T \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$T^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad T^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, T(v), \dots, T^n(v)$ linear unabhängig sind.
Tipp: Nehmen Sie an, dass es $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit

$$\lambda_0 v + \lambda_1 T(v) + \ldots + \lambda_n T^n(v) = 0$$

und zeigen Sie zuerst, dass dann $\lambda_0 = 0$ sein muss. Wenn Sie weitere Tipps brauchen, fragen Sie gerne im Forum nach!

Lösung:
Aus der Annahme $T^n(v) \neq 0$ folgt, dass die Vektoren $v, T(v), T^2(v), \dots, T^n(v)$ alle ungleich Null sind. Denn aus $T^i(v) = 0$ für $0 \leq i \leq n$ würde $T^n(v) = T^{n-i}(T^i(v)) = 0$ folgen. Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_0 v + \lambda_1 T(v) + \ldots + \lambda_n T^n(v) = 0.$$

Wir zeigen per Induktion, dass $\lambda_k = 0$ ist für $0 \leq k \leq n$.
Zunächst gilt

$$\begin{aligned} 0 = T^n(0) &= T^n\big(\lambda_0 v + \ldots + \lambda_n T^n(v)\big) \\ &= \lambda_0 T^n(v) + \lambda_1 T^{n+1}(v) + \ldots + \lambda_n T^{2n}(v) = \lambda_0 T^n(v), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen $T^k(v) = 0$ für $k > n$ gebraucht haben, was wegen $T^{n+1}(v) = 0$ gilt. Wegen $T^n(v) \neq 0$ schliessen wir daraus, dass $\lambda_0 = 0$ gelten muss. Also haben wir den Induktionsanfang gezeigt.
Wir nehmen nun an, dass wir für ein $k \in \{0, \dots, n\}$ schon gezeigt haben, dass $\lambda_0 = \ldots = \lambda_k = 0$ ist. Nach der Induktionshypothese gilt also

$$\lambda_{k+1} T^{k+1}(v) + \ldots + \lambda_n T^n(v) = 0.$$

Wir argumentieren nun genau gleich wie im ersten Schritt. Es gilt

$$\begin{aligned}0 = T^{n-(k+1)}(0) &= T^{n-(k+1)}\big(\lambda_{k+1}T^{k+1}(v) + \ldots + \lambda_n T^n(v)\big)\\ &= \lambda_{k+1}T^n(v) + \ldots + \lambda_n T^{2n-(k+1)}(v) = \lambda_{k+1}T^n(v),\end{aligned}$$

woraus $\lambda_{k+1} = 0$ folgt. Dies schließt den Induktionsschritt ab und wir haben somit $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$ gezeigt. Also sind die Vektoren $v, T(v), T^2(v), \ldots, T^n(v)$ linear unabhängig.

8. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Ein Endomorphismus $P\colon V \to V$ heißt *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 := P \circ P = P$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Für jede Projektion P gilt
   $$V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P).$$

   Lösung:
   Sei $P\colon V \to V$ eine Projektion und setze
   $$W_1 := \mathrm{Ker}(P) \quad \text{und} \quad W_2 := \mathrm{Im}(P)\,.$$
   Wir müssen zeigen, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist.
   Für ein beliebiges $v \in V$ gilt
   $$P\big(v - P(v)\big) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0,$$
   also ist $v - P(v) \in \mathrm{Ker}(P) = W_1$. Weiter ist $P(v) \in \mathrm{Im}(P) = W_2$. Damit ist
   $$v = \big(v - P(v)\big) + P(v)$$
   eine Zerlegung von v in eine Summe von $v - P(v) \in W_1$ und $P(v) \in W_2$. Somit ist $W_1 + W_2 = V$.
   Sei nun $v \in W_1 \cap W_2$. Da v im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$ mit $P(w) = v$. Wenden wir P auf die Gleichung an, so folgt $v = P(w) = P^2(w) = P(v)$. Da aber v auch im Kern von P liegt, gilt $v = P(v) = 0$. Somit ist $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

   (b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existiert eine eindeutige Projektion $P\colon V \to V$ mit
   $$\mathrm{Ker}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(P) = W_2.$$
   Tipp: Wählen Sie Basen für W_1 und W_2 und zeigen Sie, dass deren Vereinigung eine Basis für V ist. Benutzen Sie dann Satz 3.15, um eine geeignete Projektion P zu definieren.

   Lösung:
   Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ für den Untervektorraum W_1 von V und eine Basis $w_1, \ldots, w_k$ für W_2. Dann gilt $\mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k) = V$, da $V = W_1 \oplus W_2$. Wir behaupten weiter, dass $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k$ sogar linear unabhängig und damit eines Basis für V ist. Sei dazu $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ für $\alpha_i, \beta_j \in K$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in W_1$ und $\sum_{j=1}^k \beta_j w_j \in W_2$. Wir haben $0 \in V$ also dargestellt als Summe zweier Vektoren, wobei einer aus W_1 und der andere aus W_2 ist. Jedoch ist auch $0 = 0 + 0$ eine solche Darstellung und weil diese nach Proposition 2.110 eindeutig ist folgt damit $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ und $\sum_{j=1}^k \beta_j w_j = 0$. Weil $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_k$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha_i = 0$ und $\beta_j = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$. Damit ist $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von V. Nach Satz 3.15 existiert also eine eindeutige lineare Abbildung $P\colon V \to V$ mit
   $$\begin{aligned} P(v_i) &= 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\},\\ P(w_j) &= w_j, \quad j \in \{1, \ldots, k\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es gilt $P^2(w_j) = P(P(w_j)) = P(w_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und

$$P^2(v_i) = P(P(v_i)) = P(0) = 0 = P(v_i)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ wegen Proposition 3.14 (2). Die Abbildungen P und P^2 stimmen also auf der Basis $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k$ überein, und wegen der Eindeutigkeit in Satz 3.15 folgt $P^2 = P$, also ist P eine Projektion. Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Ker}(P) = W_1$ und $\operatorname{Im}(P) = W_2$ gilt.

Wegen $P(v_i) = 0$ gilt $v_i \in \ker(P)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und daher $W_1 = \operatorname{Sp}(v_1, \dots, v_n) \subseteq \ker(P)$ wegen Lemma 2.36 und da $\ker(P)$ nach Proposition 3.19 ein Untervektorraum ist. Ist $v \in \ker(P)$, so schreiben wir $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ mit $\alpha_i, \beta_j \in K$ für $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$ und bemerken $0 = P(v) = \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ wegen (1). Da $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig sind, folgt $\beta_j = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$, also $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in W_1$ und damit $\ker(P) = W_1$.

Wegen $P(w_j) = w_j$ gilt $w_j \in \operatorname{Im}(P)$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$, und daher $W_2 \subseteq \operatorname{Im}(P)$ wiederum wegen Lemma 2.36 und da $\operatorname{Im}(P)$ nach Proposition 3.19 ein Untervektorraum ist. Ist $w \in \operatorname{Im}(P)$, so existiert $v \in V$ mit $P(v) = w$. Wir schreiben erneut $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ mit $\alpha_i, \beta_j \in K$ für $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$ und bemerken $w = P(v) = \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$ gemäß (1), also gilt $w \in W_2$ und daher $\operatorname{Im}(P) = W_2$.

9. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:

Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.