D-MATH
Dr. Menny Akka Ginosar
Paula Truöl

Lineare Algebra I

HS 2020
ETH Zürich

Lösungen zu Serie 11

Inverse, Transformationsformel, Ähnlichkeit, Quotientenräume

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(b)(i), 4(b), 5(b) und 6 bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

Rechnungen wie diese sind etwas, dass Sie am Ende der Vorlesung Lineare Algebra I gut beherrschen sollten. Deswegen geben wir Ihnen hier drei Gelegenheiten, das Finden einer Inversen mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu üben. Es kann gut sein, dass Ihnen zum Beispiel zwei dieser Rechnungen genügen – diese Entscheidung überlassen wir Ihnen.

Lösung:

Wir benutzen das Gauss-Jordan-Verfahren und berechnen

$$(A_1 \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Folglich ist

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso berechnen wir

$$(A_2 \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_4 \to L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 - L_4 \to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_4 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 - L_1 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 - L_2 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 - L_3 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5} L_4 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3+L_4\to L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2+L_4\to L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1+L_4\to L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right).$$

Also ist

$$A_2^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Schlussendlich berechnen wir

$$(A_3 \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2+L_1\to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_1\to L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4-3L_1\to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3-L_4\to L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4+L_2\to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2-5L_3\to L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -4 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2+6L_4\to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1-2L_3\to L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1+3L_4\to L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}L_4\to L_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_3-2L_4\to L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_1-7L_4\to L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right).$$

Folglich ist

$$A_3^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 35 & -16 & 13 & -22\\ 11 & 0 & 11 & -11\\ 10 & -3 & 10 & -11\\ -16 & 7 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y\\ -2x+4y\\ 3x-6y \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finden Sie Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von T die Form $D_r = (d_{ij})$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \le r,\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $r = \operatorname{rang}(T)$ annimmt.

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass T gegeben ist durch $m_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen vor wie im Beweis von Proposition 3.69 bzw. Satz 3.27 (Rangsatz). Wir suchen also zunächst eine Basis von $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(A) = \text{Lös}(A, 0_{\mathbb{R}^3})$. Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Sp}\left(\begin{pmatrix} 2\\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Nach Aufgabe 1(a) von Serie 10 wissen wir $\operatorname{Im}(T) = \text{Spaltenraum}(A)$, das Bild von T wird also von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2\\ 4\\ -6 \end{pmatrix}$ erzeugt. Da der zweite ein Vielfaches des ersten ist, folgt

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

und $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$. Sei nun

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dann sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ linear unabhängig, also ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ hat die Darstellungsmatrix von T dann für $r = \mathrm{rang}(T) = 1$ die gewünschte Form:

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir durch $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ so zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ ergänzt haben, dass $T(v_1) = w_1$ gilt, vgl. Beweis von Proposition 3.69.

3. Seien die linearen Abbildungen $S\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^2$, $T\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ gegeben durch

$$S : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ und sei

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

Lösung:

Durch Anwendung des Gauss-Algorithmus sieht man, dass die Gleichungssysteme $Ax = 0$, $Cy = 0$ für $x \in \mathbb{Q}^4$, $y \in \mathbb{Q}^3$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

als einzige Lösung jeweils den Nullvektor haben. Damit sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ linear unabhängig. Wegen $\dim \mathbb{Q}^4 = 4$ und $\dim \mathbb{Q}^3 = 3$ zusammen mit Satz 2.85 zeigt dies, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $T \circ S$ und die Matrixdarstellungen von

(i) S bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. (2)

(ii) T bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

(iii) $T \circ S$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.

Lösung:

Die Abbildungen S und T sind durch Linksmultiplikation mit einer Matrix darstellbar, nämlich $S = m_U$ und $T = m_V$ für

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $T \circ S = m_V \circ m_U = m_{VU}$ für die Matrix

$$VU = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nämlich $(T \circ S)(x) = (m_V \circ m_U)(x) = V(Ux) = (VU)x = m_{VU}(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}^4$.
Die Matrizen U, V, VU sind gleichzeitig die Darstellungsmatrizen von $S, T, T \circ S$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen $\mathcal{B}_n$ von $\mathbb{Q}^n$, das heißt, es gilt

$$U = [S]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}_2}, \quad V = [T]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3} \quad \text{und} \quad VU = [T \circ S]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}_3}.$$

Beachten Sie, dass $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ ist. Die Matrix A ist die Basiswechselmatrix $A = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_4}$ und die Matrix C ist die Basiswechselmatrix $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_3}$.

(i) Die Matrixdarstellung von S bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist nach Lemma 3.61 gegeben durch

$$\begin{aligned} [S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} &= [S]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_4} = [S]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{B}_2} \cdot [\mathrm{Id}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_4} \\ &= U \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Nach Lemma 3.61 und Korollar 3.63 gilt

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{C}} [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_3} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{C}} [T]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3} = \left([\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_3}\right)^{-1} V.$$

Wir bestimmen wie in Aufgabe 1 die Inverse von C und erhalten

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Nach Lemma 3.61 ist die Matrixdarstellung von $T \circ S$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} [T \circ S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 & -7 \\ -2 & -11 & -4 & -5 \\ 10 & 42 & 16 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Wir betrachten den Endomorphismus $F := m_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass $F^2 := F \circ F \neq 0$ und $F^3 := F \circ F \circ F = 0$ gilt.

Lösung:

Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $F^2 \neq 0$ und $F^3 = 0$.

(b) Finden Sie eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ mit $F(u) = v$, $F(v) = w$, $F(w) = 0$. (2)

Lösung:

Mit dem Gaussverfahren bestimmen wir

$$\operatorname{Ker}\left(F^2\right) = \operatorname{Ker}\left(A^2\right) = \operatorname{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wir wählen nun einen beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker}\left(F^2\right)$, z. B. $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und setzen

$$v := F(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := F(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun $F(w) = F^3(u) = 0$ und $\left(u, v, w\right)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn man sieht leicht, dass das Gleichungssystem $Bx = 0$ mit B die Matrix mit Spalten u, v, w und $x \in \mathbb{R}^3$ nur die triviale Lösung haben kann.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis (u, v, w).

Lösung:

Die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{B} := \left(u, v, w\right)$ lautet

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ *ähnlich* heißen, falls es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $P^{-1}AP = B$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix $I_n \in M_{n\times n}(K)$ nur zu sich selbst ähnlich ist, d.h. falls eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ zu I_n ähnlich ist, dann gilt $A = I_n$. Zeigen Sie außerdem, dass auch die Nullmatrix nur zu sich selbst ähnlich ist.

Lösung:
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ zu I_n ähnlich. Dann gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}AP = I_n$, also gilt

$$A = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$$

wie behauptet. Sei nun $A \in M_{n\times n}(K)$ zu $0 \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich. Dann gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}AP = 0$, also $A = P0P^{-1} = 0$.

(b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich. Zeigen Sie, dass dann auch A^m und B^m ähnlich sind für alle $m \in \mathbb{N}$. (2)

Lösung:
Nach Voraussetzung gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}AP = B$. Wir zeigen durch Induktion, dass $B^m = P^{-1}A^mP$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt dann die Behauptung.
Zunächst gilt die Behauptung nach Voraussetzung für $m = 1$ und wegen

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}AI_nAP = P^{-1}A^2P$$

auch für $m = 2$. Wir nehmen nun an, dass $B^m = P^{-1}A^mP$ gilt für ein $m \in \mathbb{N}$. Unter Benutzung der Induktionshypothese gilt dann

$$B^{m+1} = BB^m = (P^{-1}AP)(P^{-1}A^mP) = P^{-1}A^{m+1}P,$$

also folgt die Behauptung durch Induktion.

(c) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und sei $B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich zu A. Zeigen Sie, dass dann auch A^m und B^m ähnlich sind für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Lösung:
Wir zeigen zunächst, dass B invertierbar ist und dass B^{-1} und A^{-1} ähnlich sind. Nach Voraussetzung gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}AP = B$. Weil A invertierbar ist, gibt es $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Es gilt

$$\left(P^{-1}A^{-1}P\right)B = \left(P^{-1}A^{-1}P\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^{-1}AP = P^{-1}I_nP = I_n \qquad \text{und}$$
$$B\left(P^{-1}A^{-1}P\right) = I_n.$$

Also ist B invertierbar mit Inverser $P^{-1}A^{-1}P$. Es gilt demnach $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, also sind B^{-1} und A^{-1} ähnlich. Aus Teilaufgabe (b) folgt nun, dass auch B^m und A^m ähnlich sind für alle $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(d) Zeigen Sie, dass der Rang einer Matrix invariant ist unter Ähnlichkeit, d.h. für ähnliche Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

Lösung:
Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich. Dann sind A und B äquivalent und haben somit nach Vorlesung denselben Rang, vgl. Bemerkung 3.73.
Alternative Lösung:
Nach Voraussetzung gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}AP = B$. Wir betrachten die Abbildungen $m_{P^{-1}}, m_P, m_A, m_B \colon K^n \to K^n$, die gegeben sind durch Linksmultiplikation mit den entsprechenden Matrizen. Wegen $P^{-1}AP = B$ gilt $m_{P^{-1}} \circ m_A \circ m_P = m_B$ und nach Lemma 3.75 sind $m_{P^{-1}}, m_P$ Isomorphismen. Aus Lemma 3.74 folgt damit $\mathrm{Rang}(m_A) = \mathrm{Rang}(m_{P^{-1}} \circ m_A \circ m_P) = \mathrm{Rang}(m_B)$. Nun ist aber nach Aufgabe 1 (a) von Serie 10

$$\mathrm{Rang}(m_B) = \dim \mathrm{Im}(m_B) = \dim \mathrm{SR}(B) = \mathrm{Spaltenrang}(B) = \mathrm{Rang}(B)$$

und genauso gilt $\mathrm{Rang}(m_A) = \mathrm{Rang}(A)$, also folgt die Behauptung.

(e) Sei nun $K = \mathbb{Q}$ und $n = 2$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Angenommen, Sie wollen die Ähnlichkeit zweier der gegebenen Matrizen $A_i, A_j, i, j \in \{1, \ldots, 8\}$ zeigen. Sie können dann zum Beispiel über die Matrizen A_i, A_j als lineare Abbildungen nachdenken (m_{A_i}, m_{A_j}) und versuchen eine geeignete Basiswechselmatrix P zu finden, welche die eine lineare Abbildung in die andere überführt.
Um zu zeigen, dass zwei gegebene Matrizen A, B nicht ähnlich sind, kann es hilfreich sein, zunächst einen von Null verschiedenen Vektor v mit $Av = v$ zu finden. Alternativ können Sie auch eine Aussage über die *Spur* verwenden, die Sie wahrscheinlich in der Übungsstunde gesehen haben.

Lösung:
Die Einheitsmatrix A_5 ist nach (a) zu keiner anderen Matrix A_i ähnlich. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2, \text{ also} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_4,$$

also sind A_1 und A_4 ähnlich. Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3,$$

also sind A_2 und A_3 ähnlich. Wir bemerken, dass A_2^2 und A_3^2 und A_7^2 gleich der Nullmatrix sind, die übrigen A_i^2 aber nicht. Wegen (a) und (b) und weil Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, ist die Matrix A_7 also entweder zu A_2 und A_3 oder zu keiner der anderen Matrizen A_i ähnlich.
Für $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $U^{-1} = U$ und

$$U^{-1} A_7 U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 .$$

Also sind A_3 und A_7 zueinander ähnlich und damit auch A_2 und A_7.
Für $V := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$V^{-1} A_6 V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_8,$$

also ist A_6 ähnlich zu A_8.
Wir bemerken schließlich noch das Folgende:
Seien $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit $P^{-1}AP = B$, und sei $v \in \mathbb{Q}^2$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Av = v$. Dann ist $w := P^{-1}v$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Bw = (P^{-1}AP)(P^{-1}v) = P^{-1}Av = P^{-1}v = w$. Die Existenz eines von Null verschiedenen Vektors v mit $Av = v$ ist also invariant unter Ähnlichkeit.
Da ein von Null verschiedener Vektor $v := \binom{1}{0}$ mit $A_1 v = v$ existiert, aber kein von Null verschiedener Vektor $w \in \mathbb{Q}^2$ mit $A_8 w = w$, sind A_1 und A_8 nicht ähnlich.

Alternativ könnten wir hier verwenden, dass die *Spur* einer Matrix invariant ist unter Ähnlichkeit, d.h. dass ähnliche Matrizen A, B dieselbe Spur haben. Die Spur, notiert als $\mathrm{Spur}(A)$ oder $\mathrm{tr}(A)$ (Abkürzung für das englische Wort trace), einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{n\times n}(K)$ ist definiert als die Summe der (Haupt-)Diagonalelemente von A, also $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Um die Invarianz der Spur unter Ähnlichkeit zu zeigen, kann man zunächst $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für

$A, B \in M_{n\times n}(K)$ zeigen. Für $B = P^{-1}AP$ folgt dann leicht $\mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}(AP^{-1}P) = \mathrm{Spur}(A)$ und wegen $\mathrm{Spur}(A_1) = 1 \neq 2 = \mathrm{Spur}(A_8)$ erhalten wir, dass A_1 und A_8 nicht ähnlich sein können.

Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt insgesamt, dass A_2, A_3 und A_7, beziehungsweise A_1 und A_4, beziehungsweise A_6 und A_8 ähnlich sind, aber keine weiteren Ähnlichkeiten der A_i existieren.

Bemerkung:

Die Partition von $\{A_1, \ldots, A_8\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation Ähnlichkeit ist also

$$\{\{A_2, A_3, A_7\}, \{A_1, A_4\}, \{A_5\}, \{A_6, A_8\}\}.$$

6. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. In der Vorlesung wurde die Skalarmultiplikation auf dem Quotientenraum (2)

$$V/U := V/\sim_U = \{v + U \mid v \in V\}$$

durch

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V/U &\to V/U \\ (\alpha, v + U) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Skalarmultiplikation wohldefiniert ist.

Lösung:

Seien $v, v' \in V$ mit $v + U = v' + U$. Um zu zeigen, dass die Skalarmultiplikation wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass

$$\alpha v + U = \alpha v' + U.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\alpha v - \alpha v' \in U \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(v - v') \in U.$$

Letzteres ist jedoch wahr, da nach Annahme $v - v' \in U$ gilt und somit auch $\alpha(v - v') \in U$ wegen der Eigenschaft (UVR3) von U.

7. Sei $V := \mathbb{R}^5$ mit der Standardbasis $e_1, \ldots, e_5$ und sei $U \subseteq V$ der Untervektorraum aufgespannt durch

$$v_1 = \ (1, 2, 0, -1, 1)^T, v_2 = (0, 1, 1, 0, 1)^T, v_3 = (0, 1, 1, 1, 1)^T.$$

(a) Finden Sie eine Basis w_1, w_2 des Quotientenvektorraums V/U.

Lösung:

Wir betrachten die drei Vektoren als Zeilenvektoren und wenden eine Zeilenoperation an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\dim U = 3$. Durch Hinzufügen der Standardbasisvektoren e_3 und e_5 erhalten wir eine 5×5-Matrix in Zeilenstufenform, d.h. zusammen bilden die fünf Vektoren eine Basis von V. Sei $U' = \mathrm{Sp}(e_3, e_5)$. Es folgt, dass die Summe $U + U'$ direkt ist, also $U \cap U' = \{0\}$. Nach Proposition 3.96 hat die kanonische Quotientenabbildung $\pi_U : V \to V/U, v \mapsto v + U$ den Kern U. Wegen $U \cap U' = \{0\}$ ist die Einschränkung

$$\pi_U|_{U'} : U' \to V/U$$

also injektiv. Da nach Korollar 3.124 $\dim V/U = \dim V - \dim U = 5 - 3 = 2 = \dim U'$ gilt, ist die Einschränkung $\pi_U|_{U'}$ nach Korollar 3.29 ein Isomorphismus (siehe auch Proposition 3.128). Wegen Aufgabe 7(b) von Serie 9 bilden die Bilder $w_1 = e_3 + U$ und $w_2 = e_5 + U$ von e_3 bzw. e_5 also eine Basis von V/U.

(b) Wir definieren eine Abbildung $f\colon V/U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1w_1 + x_2w_2) = (x_1, x_2)\,.$$

Sei $\pi_U\colon V \to V/U$ die kanonische Quotientenabbildung und definiere $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ als Komposition

$$V \xrightarrow{\pi_U} V/U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2,$$

also $F := f \circ \pi_U$. Zeigen Sie $F(e_4) = 0$ und $F(e_3) + F(e_5) = -F(e_2)$. Beachten Sie, dass dies unabhängig von Ihrer Wahl einer Basis in (a) gilt.

Lösung:

Wir bemerken zunächst, dass f und damit auch F linear ist. Es gilt $e_4 = v_3 - v_2 \in U$, also $e_4 \in \mathrm{Ker}(\pi_U) \subseteq \mathrm{Ker}(F)$, also $F(e_4) = (0,0)$. Außerdem ist

$$e_2 + e_3 + e_5 = v_2 \in U,$$

also gilt $F(e_2 + e_3 + e_5) = 0$, was wegen der Linearität von F die Behauptung impliziert.

(c) Bestimmen Sie nun $F(e_j)$ für $j \in \{1, 2, 3, 5\}$. Beachten Sie, dass diese Bilder nun von Ihrer Wahl in (a) abhängen.

Lösung:

Wir berechnen die Zerlegung von e_j bezüglich $V = U \oplus U'$ mit $U' = \mathrm{Sp}(e_3, e_5)$ wie in (a) und benutzen $F(v_i) = 0$ wegen $v_i \in U$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 - 3v_2 + v_3 + e_3 + 2e_5 && \implies F(e_1) = (1,2)\,,\\
e_2 &= v_2 - e_3 - e_5 && \implies F(e_2) = (-1,-1)\,,\\
e_3 &= e_3 && \implies F(e_3) = (1,0)\,,\\
e_5 &= e_5 && \implies F(e_5) = (0,1)\,.
\end{aligned}$$

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:

Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.