D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich
Paula Truöl

Lösungen zur Ferienserie

Wichtige Hinweise: Auf dieser Serie können Sie keine Punkte bekommen. Die Aufgaben auf dieser Serie sind im Allgemeinen *nicht* in Form von potentiellen Prüfungsfragen gehalten, dazu wird es die Probeprüfung geben. Das heißt natürlich nicht, dass Prüfungsfragen nicht ähnlich zu Fragen auf dieser Serie sein können. Sie sollten aber nicht das Gefühl haben, etwas zu verpassen, wenn Sie die Aufgaben dieser Ferienserie nicht lösen. Der Stoff dieser Aufgaben wurde schon ausführlich auf den Serien 1-13 behandelt und wir haben hier auch nicht versucht, einen Überblick über den ganzen Stoff der Vorlesung zu geben. Die Serie gibt Ihnen einfach durch ,,im Semester übrig gebliebene Aufgaben" die Möglichkeit, Inhalte der Vorlesung durch noch mehr Übungsaufgaben weiter zu vertiefen.

1. Sei $G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ und $a * b := \max\{a, b\}$. Ist $(G, *)$ eine kommutative Gruppe?

   Lösung:

   Die Operation $*$ ist assoziativ und kommutativ. Da ausserdem für alle $a \in G$ gilt

   $$0 * a = \max\{0, a\} = a,$$

   ist 0 ein neutrales Element. Für jedes $a \in G$ mit $a > 0$ und jedes $a' \in G$ gilt aber

   $$a' * a = \max\{a', a\} \geq a > 0.$$

   Also ist a' kein Linksinverses von a; somit besitzt a kein Linksinverses und $(G, *)$ ist keine Gruppe.

   Alternative Lösung: Für alle $a \in G$ gilt

   $$a * a = \max\{a, a\} = a.$$

   Wenn $(G, *)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e ist, so folgt für alle $a \in G$

   $$a = e * a = (a^{-1} * a) * a = a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a = e.$$

   Das ist ein Widerspruch, da G mehr als ein Element enthält.

2. Ist $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ ein Untervektorraum? Hier sei $\mathbb{C}^2$ der Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation eines Koordinatenraumes.

   Lösung:

   Falls $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ ein Untervektorraum ist, muss $i(1, 1) = (i, i) \in \mathbb{R}^2$ gelten, ein Widerspruch. Also ist $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ kein Untervektorraum.

3. Sind $+$ und $\cap$ von Untervektorräumen zueinander distributiv, das heißt, gelten für alle Untervektorräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

   $$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$

   Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

Lösung:

Für jedes $i = 1, 2$ gilt $V_i \subseteq V_1+V_2$ und somit $U\cap V_i \subseteq U\cap(V_1+V_2)$. Da $U\cap(V_1+V_2)$ ein Untervektorraum ist, folgt

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \ \subseteq \ U \cap (V_1 + V_2)\,. \tag{1}$$

Weiter gilt $V_1 \cap V_2 \subseteq V_i$ und somit $U + (V_1 \cap V_2) \subseteq U + V_i$, und daher

$$U + (V_1 \cap V_2) \ \subseteq \ (U + V_1) \cap (U + V_2)\,. \tag{2}$$

Dagegen ist die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen in beiden Fällen falsch:
Für die Untervektorräume $U := \mathrm{Sp}\,((1, 1))$ und $V_1 := \mathrm{Sp}\,((1, 0))$ und $V_2 := \mathrm{Sp}\,((0, 1))$ von K^2 für einen Körper K gilt nämlich $U \cap V_1 = U \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = 0$ und $U + V_1 = U + V_2 = V_1 + V_2 = K^2$ und somit

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \ = \ 0 + 0 \ = \ 0 \ \neq \ U \ = \ U \cap K^2 \ = \ U \cap (V_1 + V_2)$$

sowie

$$U + (V_1 \cap V_2) \ = \ U + 0 \ = \ U \ \neq \ K^2 \ = \ K^2 \cap K^2 \ = \ (U + V_1) \cap (U + V_2).$$

4. Seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume von V, von denen keiner in einem der anderen enthalten ist. Entscheiden Sie, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, manchmal, oder nie ein Untervektorraum ist.

Lösung:

Sei $V := K^2$ und setze $V_1 := \mathrm{Sp}\left(\binom{1}{0}\right)$ und $V_2 := \mathrm{Sp}\left(\binom{0}{1}\right)$ und $V_3 := \mathrm{Sp}\left(\binom{1}{1}\right)$.

Für $K = \mathbb{Q}$ sind $\binom{2}{0}$ und $\binom{0}{1}$ Elemente von $V_1 \cup V_2 \cup V_3$, aber ihre Summe $\binom{2}{1}$ nicht. Die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ ist also kein Vektorraum.

Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \mathbb{F}_2^2$, also insbesondere ein Vektorraum. Die korrekte Antwort auf die Frage lautet also „manchmal“.

5. Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5) \ \middle| \ \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0 \right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$$

ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

Lösung:

Wir fassen den Körper $\mathbb{F}_5$ auf als

$$\{\bar{0}\,, \bar{1}\,, \bar{2}\,, \bar{3}\,, \bar{4}\,\}\,.$$

Die Nullfunktion (die konstante Funktion $x \mapsto 0$) ist das Nullelement in $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$ und ist offenbar in U enthalten. Desweiteren gilt für $f, g \in U$ und $a \in \mathbb{F}_5$:

$$\sum_{i=0}^{4}(f + ag)(\bar{i}) = \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) + a \sum_{i=0}^{4} g(\bar{i}) = 0$$

und daher $f +ag \in U$. Alternativ kann man auch direkt sagen, dass U die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung ist und daher ein Untervektorraum.

Wir bestimmen nun eine Basis von U. Für $i = 1, 2, 3, 4$ betrachten wir die Abbildung

$$f_i(\bar{j}) = \begin{cases} \bar{4}\,, j = 0 \\ \bar{1}\,, j = i \\ 0\,, \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Erinnerung: Hierbei ist natürlich $\bar{4} = -\bar{1}$ in $\mathbb{F}_5$ und somit $f_i \in U$.

Wir zeigen, dass die Abbildungen f_i linear unabhängig sind. Seien hierzu $a_i \in \mathbb{F}_5$, so dass

$$\sum a_i f_i = 0\,.$$

Für $j = 1, 2, 3, 4$ ist dann aber

$$0 = \left(\sum a_i f_i\right)(\bar{j}) = a_j f_j(\bar{j}) = a_j\,.$$

Wir zeigen, dass U von den Abbildungen f_i erzeugt wird. Sei hierzu $f \in U$ und definiere g als Linearkombination wie folgt:

$$g = f(\bar{1})f_1 + f(\bar{2})f_2 + f(\bar{3})f_3 + f(\bar{4})f_4\,.$$

Dann gilt für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$g(\bar{i}) = f(\bar{i})f_i(\bar{i}) = f(\bar{i})\,.$$

Da $f \in U$ gilt außerdem

$$f(\bar{0}) = -\left(\sum_{i=1}^{4} f(\bar{i})\right) = \sum_{i=1}^{4} f(\bar{i}) \cdot \bar{4} = g(\bar{0})\,,$$

und somit $f = g$.

6. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie: Dann ist $\{u, v, w\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $\{u + v, v + w, u + w\}$ linear unabhängig ist.

Lösung:

“⇒” Sei $\{u, v, w\}$ linear unabhängig und seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ so dass

$$\begin{aligned} 0_V =&\alpha(u + v) + \beta(v + w) + \gamma(w + u) \\ =&(\alpha + \gamma)u + (\alpha + \beta)v + (\beta + \gamma)w \end{aligned}$$

Nach Annahme sind also $0 = \alpha+\gamma = \alpha+\beta = \beta+\gamma$. Es gilt also $\gamma = -\alpha$, $\beta = -\alpha$ und $\beta+\gamma = -2\alpha$. Folglich ist $\alpha = 0$ und also $\beta = \gamma = 0$.

“⇐”: Sei $\{u + v, v + w, w + u\}$ linear unabhängig und sein $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit

$$0_V = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

Dann gilt auch

$$0_V = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)u + \left(\frac{1}{2}\beta\right)v + \left(\frac{1}{2}\gamma\right)w$$

für $\frac{1}{2} = 2^{-1} \in K$, wobei $0 \neq 2 := 1 + 1 \in K$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \alpha' =&\alpha + \beta - \gamma \\ \beta' =& -\alpha + \beta + \gamma \\ \gamma' =&\alpha - \beta + \gamma \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\alpha'(u + v) + \beta'(v + w) + \gamma'(w + u) =2(\alpha u) + 2(\beta v) + 2(\gamma w) = 0$$

Also ist wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{u+v, v+w, w+u\}$ wahr, dass $0 = \alpha' = \beta' = \gamma'$. Es folgen

$$
\begin{aligned}
2\alpha &= \alpha' + \gamma' = 0 \\
2\beta &= \alpha' + \beta' = 0 \\
2\gamma &= \beta' + \gamma' = 0
\end{aligned}
$$

und also $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dies zeigt, dass $\{u, v, w\}$ linear unabhängig ist.

7. Zeigen Sie, dass die Funktionen (∗)

$$\varphi_n : \mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n+x}$$

für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ linear unabhängig sind.

Tipp: Verwenden Sie, dass ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

Lösung:

Betrachten Sie endlich viele $a_i \in \mathbb{R}$, sowie paarweise verschiedene $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^m a_i \varphi_{n_i} = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{1}{n_i + x} \;=\; 0.$$

Durch Multiplikation mit $\prod_{i=1}^m (n_i + x)$ ergibt sich daraus

$$\sum_{i=1}^m a_i \prod_{j \neq i} (n_j + x) = 0.$$

Hier ist die linke Seite ein Polynom in x, also folgt aus dem Hinweis, dass dieselbe Gleichung schon für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere gilt die Gleichung auch für $x = -n_k$ für jedes $1 \leq k \leq m$. Für alle $i \neq k$ ist aber $\prod_{j \neq i} (n_j - n_k) = 0$; somit reduziert sich die Gleichung dann zu

$$a_k \cdot \prod_{j \neq k} (n_j - n_k) = 0.$$

Da die n_i paarweise verschieden sind, ist $\prod_{j \neq k} (n_j - n_k) \neq 0$ und deshalb $a_k = 0$. Da k beliebig war, schliessen wir $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Also sind $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ linear unabhängig.

8. Sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ die Untervektorräume gegeben durch

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\} \\
W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = 0, c = -b \right\}
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von $W_1, W_2, W_1 + W_2$ sowie $W_1 \cap W_2$.

Lösung:

Seien $v_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt sicher $\mathrm{Sp}\,(v_1, v_2, v_3) = W_1$, denn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Insbesondere folgt aus dieser Rechnung, dass $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ genau dann, wenn $a = b = c = 0$. Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von W_1. Seien $w_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $W_2 = \mathrm{Sp}\,(w_1, w_2)$, denn

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix} = bw_1 + dw_2$$

Insbesondere folgt aus dieser Rechnung, dass $bw_1 + dw_2 = 0$ genau dann, wenn $b = d = 0$. Also ist $\{w_1, w_2\}$ eine Basis von W_2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in W_1 \cap W_2$, dann gilt $a = d$ wegen $A \in W_1$ und $a = 0$ und $c = -b$ wegen $A \in W_2$. Also ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt also $W_1 \cap W_2 = \mathrm{Sp}\,(v_2 - v_3)$ und somit $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. Also gilt

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3 + 2 - 1 = 4.$$

9. Bestimmen Sie den Rang der folgenden rationalen $(n\times n)$-Matrix in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n:

$$B = \left((-1)^{k+\ell}\,(k + \ell - 1)\right)_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le \ell\le n}}$$

Lösung:

Sei $B = (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ mit $b_{kl} := (-1)^{k+l}(k + l - 1)$. Für $n = 1$ hat $B = (1) \neq 0$ Rang 1, wir können also $n \geq 2$ annehmen. Für alle $k = 1, \ldots, n-2$ und $\ell = 1, \ldots, n$ gilt

$$b_{kl} + 2b_{k+1,l} + b_{k+2,l} = 0,$$

also ist die k-te Zeile von B eine Linearkombination der $(k+1)$-ten und der $(k+2)$-ten Zeile. Man kann daher B durch Zeilenoperationen zu einer Matrix umformen, in der bis auf die letzten beiden Zeilen alle Einträge verschwinden und die letzten beiden Zeilen mit denen von B übereinstimmen. Man prüft dann direkt, dass diese beiden Zeilen linear unabhängig sind. Es folgt

$$\mathrm{Rang}\, B = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 2 & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

10. Für einen Körper K seien Elemente $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Wechen Rang kann die Matrix

$$A := (a_i b_j)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(K)$$

haben?

Lösung:

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Da der Rang jeder $(m \times 1)-$ und jeder $(1 \times n)$-Matrix kleiner gleich 1 ist, folgt aus Serie 10, Aufgabe 5, dass $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ ist. (Beachte, dass $\mathrm{Rang}(m_A) = \mathrm{Rang}(A)$ gilt, siehe auch die Lösung von Aufgabe 13 (a) unten.) Im Fall $a_i = 0$ für alle i oder $b_j = 0$ für alle j ist A die Nullmatrix und der Rang ist 0. Falls ein i und ein j existiert mit $a_i \neq 0$ und $b_j \neq 0$, ist der (i,j)-te Koeffizient von A und damit auch A ungleich Null; der Rang von A ist somit 1. Wir schliessen, dass die Matrix A Rang 0 oder 1 haben kann.

11. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie: Seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann ist

$$\mathrm{Rang}(T_1 + T_2) \leq \mathrm{Rang}(T_1) + \mathrm{Rang}(T_2)$$

Lösung:

Sei $w \in \mathrm{Im}(T_1 + T_2)$, dann existiert ein $v \in V$, so dass

$$w = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \in \mathrm{Im}(T_1) + \mathrm{Im}(T_2)$$

Also ist $\mathrm{Im}(T_1 + T_2) \subset \mathrm{Im}(T_1) + \mathrm{Im}(T_2)$ und folglich

$$\begin{aligned}\mathrm{Rang}(T_1 + T_2) &= \dim \mathrm{Im}(T_1 + T_2) \leq \dim\left(\mathrm{Im}(T_1) + \mathrm{Im}(T_2)\right) \\ &\leq \dim \mathrm{Im}(T_1) + \dim \mathrm{Im}(T_2) = \mathrm{Rang}(T_1) + \mathrm{Rang}(T_2).\end{aligned}$$

12. Für einen Körper K sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $AX = XA$ für alle $(n \times n)$-Matrizen X. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda I_n$.

Lösung:

Die Matrix $A = (a_{ij})$ kommutiert insbesondere mit den Matrizen

$$E_{kl} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{1\leq i,j\leq n}$$

für alle $k, l = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$0 = (E_{kl}A - AE_{kl})_{kj} = \sum_{i=1}^{n} (E_{kl})_{ki} a_{ij} - a_{ki}(E_{kl})_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{li} a_{ij} - a_{ki}\delta_{ki}\delta_{lj} = a_{lj} - a_{kk}\delta_{lj}.$$

Damit ist $a_{lj} = 0$ für alle $l \neq j$ und A also eine Diagonalmatrix. Da auch $a_{ll} = a_{kk}$ gilt für alle l, k, sind alle Diagonalelemente gleich und $A = \lambda I_n$ mit $\lambda := a_{11}$.

13. Seien K ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
   (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ hat genau dann Rang $\leq r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(K)$ gibt, so dass $C = AB$.
   (b) Ist $\mathrm{Rang}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B) = r$ gelten.

Lösung:

(a) Nach Serie 10, Aufg. 5 ist $\mathrm{Rang}(m_{AB}) \leq \min\{\mathrm{Rang}(m_A), \mathrm{Rang}(m_B)\}$. Wegen $\mathrm{Rang}(m_D) = \mathrm{Rang}(D)$ für eine beliebige Matrix D (vgl. Lösung zu Aufgabe 5 (d) auf Serie 11), folgt daraus

$$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\} \tag{3}$$

und daher $\mathrm{Rang}(C) \leq r$, falls $C = AB$. Andersherum nehmen wir an, dass $\mathrm{Rang}(C) \leq r$. Wir betrachten C als darstellende Matrix einer linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{E}$. Dann ist f die Komposition

$$K^n \xrightarrow{g} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\iota} K^m\,,$$

wobei g die gleiche Abbildung beschreibt wie f und die zweite Abbildung die Inklusion ist. Nach Wahl einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Im}(f)$ ist die erste Abbildung beschrieben durch eine Matrix $B = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$, die zweite Abbildung durch eine Matrix $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\iota)$ und daher $C = AB$. Beachten Sie, dass wir $B \in M_{r\times n}(K)$ wählen können wegen $r \geq \mathrm{Rang}(C) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Alternativer Beweis für die Rückrichtung: Wir haben gesehen (Proposition 3.71), dass jede $(m \times n)$-Matrix C äquivalent ist zu einer Matrix mit Normalform $N = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $r' = \mathrm{Rang}(C)$, also $C = SNT$, mit $S \in GL_m(K)$, $T \in GL_n(K)$. Da aber $N = XY$ mit $X = \begin{pmatrix} I_{r'} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \end{pmatrix}$, können wir schreiben

$$C = \underbrace{SX}_{=:A}\underbrace{YT}_{=:B}.$$

Falls $r' < r$ können wir einfach $r - r'$ Nullzeilen bzw. Nullspalten hinzufügen.

(b) Falls $\mathrm{Rang}(A) < r$ oder $\mathrm{Rang}(B) < r$ erhalten wir aus (3) direkt einen Widerspruch.

14. Stellen Sie fest, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Für einen Körper K, $A \in M_{n\times m}(K)$, $b \in K^n$ und $L = \{x \in K^m \mid Ax = b\}$ gilt

$$\{x \in K^m \mid Ax = 0\} = \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in L\}.$$

(b) Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen über einem Körper K und n Unbekannten, sodass alle zugehörigen inhomogenen Gleichungssysteme mindestens eine Lösung haben. Dann haben all diese Gleichungssysteme genau eine Lösung.

(c) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann sind u, v, w linear abhängig genau dann, wenn $u \in \mathrm{Span}(v, w)$ oder $v \in \mathrm{Span}(u, w)$ oder $w \in \mathrm{Span}(u, v)$ gilt.

(d) Es gibt keine vom Nullvektor verschiedene Linearkombination $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ der Vektoren

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\right),\ \left(1, \pi, \pi^2, \pi^3\right) \in \mathbb{R}^4,$$

welche die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ erfüllt.

Lösung:

(a) Diese Aussage ist falsch, da L leer sein kann, $\{x \in K^m \mid Ax = 0\}$ jedoch mindestens $x = 0$ enthält.

(b) Richtig: Jede Matrix A, also auch die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, kann als Abbildung $m_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$ aufgefasst werden. Die Bedingung aus der Aufgabe sagt genau, dass m_A surjektiv ist, und somit auch injektiv.

(c) "$\Longleftarrow$" ist trivial; "$\Longrightarrow$:" Es gibt $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ mit $au + bv + cw = 0$, also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$. Falls $a \neq 0$, dann gilt $u \in \mathrm{Span}(v, w)$. Falls $b \neq 0$, dann gilt $v \in \mathrm{Span}(u, w)$. Falls schließlich $c \neq 0$, dann gilt $w \in \mathrm{Span}(u, v)$

(d) Falsch: Es bezeichne V den Vektorraum der von den beiden angegebenen Vektoren aufspannt wird, und W den Vektorraum der Lösungen der linearen Gleichung. Dann gilt mit der Dimensionsformel

$$\dim\Big(V \cap W\Big) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) \geq 2 + 3 - 4 = 1.$$

15. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A_n = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ als Funktion von n, wobei die Einträge von A für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ definiert sind als

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ n + 1 - j & i > j. \end{cases}$$

Lösung:
Sei A_n die gegebene Matrix, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ n & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ n & n-1 & 1 & & & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenoperation 1-te Spalte - n-te Spalte ergibt

$$\det A_n = \det \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & n-1 & & 1 \end{pmatrix} = (1-n)\det A_{n-1}.$$

Also gilt wegen $\det A_1 = 1$ induktiv $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,.$