Lösungen zur Probeprüfung

Hinweise zur Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}[x]_n = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$. Für Vektorräume V, W über einem Körper K und eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W. $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W.

1. **(28 Punkte)** Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

(1) Sei K ein Körper und seien $f, g \in K[x]$ mit $f \neq g$ und $\deg(f) = \deg(g) = n$. Dann gilt $\deg(f+g) = n$.

(2) Für $n \geq 2$ gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Äquivalenzrelationen auf $\{1, \ldots, n\}$.

(3) Eine Abbildung $f\colon M \to M$ auf einer Menge M ist genau dann surjektiv, wenn $f \circ f$ surjektiv ist.

(4) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$. Falls $|V| = \infty$ ist, so gilt $\dim V = \infty$.

(5) Sei K ein Körper und seien $U = \mathrm{Sp}(e_1, e_2), W = \mathrm{Sp}(e_3, e_4) \subseteq K^4$, wobei e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasisvektoren von K^4 bezeichnen. Dann existiert ein Untervektorraum $Z \subseteq K^4$, sodass

$$U \oplus Z = W \oplus Z = K^4.$$

(6) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

(7) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $A = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$. Gibt es einen Vektor $v \in V$, der sich eindeutig als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ schreiben lässt, so ist A linear unabhängig.

(8) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt: Falls T injektiv ist, so ist T auch surjektiv.

(9) Für alle $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}\left(B^T A^T\right)$.

(10) Für jede quadratische Matrix A gilt $\dim \mathrm{Ker} A = \dim \mathrm{Ker} A^T$.

(11) Sei $T\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ die lineare Abbildung definiert durch $T(x, y) = (-y, x)$. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^2$ mit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(12) Falls $T \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{F}_2^3, \mathbb{F}_2^2\right)$ surjektiv ist, dann hat jeder Vektor in $\mathbb{F}_2^2$ genau zwei Urbilder.

(13) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper. Für Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $AB - A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt

$$BA - A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

(14) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für den Endomorphismus $T\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p \mapsto p + p'$ gilt $\det T = 0$.

Lösung:

falsch, falsch, wahr, wahr, wahr, falsch, wahr, falsch, wahr, wahr, falsch, wahr, wahr, falsch

2. (**16 Punkte**) Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A^2B^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 23 & 17 & 0 \\ 34 & 5 & 23 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

$\det(A^2B^{-1}) = -1$

Lösung:
Zum Beispiel mit Laplace-Entwicklung berechnet man $\det(A) = 23$ und $\det(B) = -23^2$. Also gilt $\det(A^2B^{-1}) = \frac{\det(A)^2}{\det(B)} = -1$.

(b) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

$\operatorname{Rang} A = 3$

Lösung:
Durch Zeilenumformungen bringt man A auf Zeilenstufenform mit 3 Pivots, also gilt $\operatorname{Rang} A = 3$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ für die lineare Abbildung

$$T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A + A^T$$

und die Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt die angegebene Darstellungsmatrix.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von $V = \mathrm{Hom}\left(M_{3\times 4}\left(\mathbb{F}_5\right), \mathbb{F}_5\right)$ als Vektorraum über $\mathbb{F}_5$.

$\boxed{\dim V = 12}$

Lösung:

Es gilt $\dim V = \dim\left(M_{3\times 4}\left(\mathbb{F}_5\right)\right) \cdot \dim\left(\mathbb{F}_5\right) = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$.

3. **(12 Punkte)** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und $m_A\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, x \mapsto Ax$. Dann gibt es geordnete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}^2$, sodass $[m_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Die Aussage ist wahr.

Beweis: Wegen $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 9/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt für die Basen $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9/2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ die Behauptung. □

Bemerkung: Aus der Diskussion in Abschnitt 3.3.3 im Skript (insbesondere Übung 3.68) ergibt sich, dass die Menge aller Matrizen der Form $[m_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ für Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}^2$ eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation Äquivalenz bilden. Wegen $[m_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A$ für die Standardbasis $\mathcal{E}$, ist dies hier die Äquivalenzklasse von A. Wir haben auch gesehen, dass zwei Matrizen genau dann äquivalent sind, wenn sie denselben Rang haben (vgl. Bemerkung 3.73). Da A und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ invertierbar sind (ihre Determinante verschwindet nicht), sind beide von Rang 2, und daher äquivalent zueinander. Es folgt also, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in der Äquivalenzklasse von A ist. Dies bedeutet wie oben beschrieben aber, dass es Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}^2$ gibt, sodass $[m_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim V = n < \infty$ und sei $T\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $T^2 = 0$. Dann gilt $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq \frac{1}{2} \dim V$.

Lösung:

Die Aussage ist wahr.

Beweis: Nach dem Rangsatz aus der Vorlesung gilt $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$. Wegen $T^2 = T \circ T = 0$ gilt $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$:
Sei $w \in \mathrm{Im}(T)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $Tv = w$ und es gilt $Tw = \underbrace{T^2}_{=0} v = 0$, also $w \in \mathrm{Ker}(T)$.

Also gilt $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim \mathrm{Ker}(T)$. Daraus folgt

$$\dim V \leq \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T) = 2 \dim \mathrm{Ker}(T),$$

also $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq \frac{1}{2} \dim V$ wie behauptet. □

(c) Die Menge $U = \left\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Lösung:

Diese Aussage ist falsch.

Beweis: Es gilt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U$, denn $A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt aber $A + B \notin U$, also ist (UVR2) verletzt und U somit kein Untervektorraum von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $\square$

4. **(12 Punkte)** Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ und $\mathcal{C} = \left(2 + 2x^3, 2x^2, x + x^2, x^3\right)$ des Vektorraums

$$\mathbb{R}[x]_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}\,.$$

(a) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

Lösung:

Nach Vorlesung gilt $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \left([\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$. Wir bestimmen zunächst $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ und dann die inverse Matrix dazu. Durch Betrachtung der Basisvektoren in $\mathcal{C}$ erhalten wir aus $2+2x^3 = 2\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 2\cdot x^3$, $2x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 2\cdot x^2 + 0\cdot x^3$, usw. sofort

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen nun das Gauss-Jordan-Verfahren und berechnen

$$\left([\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \mid I_4\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 - 2L_1 \to L_4]{L_2 - L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Folglich ist

$$[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \left([\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **(6 Punkte)** Sei nun $T\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$p \mapsto (x+2)p + p'' + p(1).$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ von T bezüglich der Basen $\mathcal{D} = \left(1, x, x^2\right)$ von $\mathbb{R}[x]_2$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}[x]_3$.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst $[T]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$ und berechnen dafür die Bilder der Basisvektoren. Es gilt

$$\begin{aligned} T(1) &= (x+2)\cdot 1 + 0 + 1 = x + 3, \\ T(x) &= (x+2)x + 0 + 1 = x^2 + 2x + 1, \\ T\left(x^2\right) &= (x+2)x^2 + 2 + 1 = x^3 + 2x^2 + 3. \end{aligned}$$

Nach Definition der Darstellungsmatrix folgt daraus

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Vorlesung gilt nun

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) **(2 Punkte)** Finden Sie für T wie in (b) ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_2$ mit $T(p) = 5x^3 + 12x^2 - 3x - 4$.

Lösung:

Sei $f = 5x^3 + 12x^2 - 3x - 4$. Wir suchen ein $p \in \mathbb{R}[x]_2$ mit $T(p) = f$. Sei $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(p) = f &\Leftrightarrow (x+2)p + p'' + p(1) = f \Leftrightarrow (x+2)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) + 2a_2 + (a_0 + a_1 + a_2) = f \\ &\Leftrightarrow (3a_0 + a_1 + 3a_2) + (a_0 + 2a_1)\,x + (a_1 + 2a_2)\,x^2 + a_2 x^3 = -4 - 3x + 12x^2 + 5x^3. \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann, wenn die folgenden vier Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} 3a_0 + a_1 + 3a_2 &= -4 \\ a_0 + 2a_1 &= -3 \\ a_1 + 2a_2 &= 12 \\ a_2 &= 5. \end{aligned}$$

Von unten nach oben erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen aus den letzten drei Gleichungen

$$a_2 = 5, a_1 = 2, a_0 = -7$$

und mit dieser Wahl ist auch die erste Gleichung erfüllt. Also ist $p = -7 + 2x + 5x^2$ das gewünschte Polynom mit $T(p) = f$.

5. **(14 Punkte)** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) **(2 Punkte)** Definieren Sie, was ein Komplement von U ist.

Lösung:

Ein Komplement von U in V ist ein Untervektorraum W von V mit $V = U \oplus W$. [Vgl. Def. 2.113]

(b) **(6 Punkte)** Es gelte nun $\dim V < \infty$. Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ ein Komplement besitzt.

Lösung:

Die zu zeigende Aussage entspricht der folgenden Behauptung.

Behauptung: Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt es einen Untervektorraum W von V mit $V = U \oplus W$.

Beweis: Sei $u_1, \ldots, u_l$ eine Basis für U. Nach Vorlesung kann man diese zu einer Basis von V erweitern, sei also $u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_k$ eine Erweiterung der Basis von U zu einer Basis von V. Sei $W := \mathrm{Sp}\,(w_1, \ldots, w_k)$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass dies ein Untervektorraum von V ist. Wir behaupten, dass $V = U \oplus W$ gilt. Dies ist nach Vorlesung äquivalent zu $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

Zunächst bemerken wir, dass nach einer Proposition aus der Vorlesung

$$U + W = \mathrm{Sp}\,(U \cup W) = \mathrm{Sp}\,(u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_k) = V$$

gilt, da $U \cup W$ von $u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_k$ erzeugt wird. Wir zeigen nun, dass auch $U \cap W = \{0\}$ gilt. Sei dazu $v \in U \cap W$. Dann existieren $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k \in K$ mit

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_l u_l = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k \Leftrightarrow a_1 u_1 + \dots + a_l u_l - b_1 w_1 - \dots - b_k w_k = 0.$$

Da $u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig sind (weil sie eine Basis von V bilden), folgt daraus

$$a_1 = \dots = a_l = b_1 = \dots = b_k = 0$$

und daher ist $v = 0$.
Es gilt also $V = U \oplus W$ und damit die Behauptung. □

(c) **(6 Punkte)** Sei nun $K = \mathbb{F}_2$, also V ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$, und es gelte $\dim V = n$ und $\dim U = n - 1$. Wie viele verschiedene Komplemente hat U in V?

Lösung:

Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung.
Behauptung: Für jeden Vektor $w \notin U$ ist $\mathrm{Sp}(w)$ ein Komplement von U in V.
Beweis: Sei $w \notin U$. Dann gilt $U \subsetneq (U + \mathrm{Sp}(w)) \subseteq V$, also nach Vorlesung

$$\dim U < \dim\,(U + \mathrm{Sp}(w)) \leq \dim V.$$

Wegen $\dim U = n - 1$ und $\dim V = n$ folgt daraus $\dim\,(U + \mathrm{Sp}(w)) = \dim V = n$, also

$$U + \mathrm{Sp}(w) = V.$$

Außerdem gilt $w \neq 0$ (da $0 \in U$, weil U ein Untervektorraum ist, und $w \notin U$) und somit nach Vorlesung $0 < \dim \mathrm{Sp}(w)$. Daraus folgt $\dim \mathrm{Sp}(w) = 1$, also $\dim U + \dim \mathrm{Sp}(w) = n - 1 + 1 = n = \dim V$ und damit nach Vorlesung $V = U \oplus \mathrm{Sp}(w)$. Dies beendet den Beweis der Behauptung.

Andererseits gilt für ein Komplement W von U in V, dass $\dim W = 1$. Für jedes solche Komplement W gibt es also einen Vektor $w \in V \setminus U$, sodass $W = \mathrm{Sp}(w)$ ist. Außerdem gilt für alle $w \in V$, da V ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist, dass $\mathrm{Sp}(w) = \{w, 0\}$. Daher gilt für $w, w' \in V \setminus \{0\}$, dass

$$\mathrm{Sp}(w) = \mathrm{Sp}(w') \iff w = w'.$$

Die Komplemente von V sind also genau die Untervektorräume $\mathrm{Sp}(w)$ für $w \notin U$ bzw. für $w \in V \setminus U$ und die Anzahl der Komplemente von U in V ist die Anzahl der Vektoren in $V \setminus U$. Da V, U Vektorräume über $\mathbb{F}_2$ der Dimension n bzw. $n - 1$ sind, gilt $|V| = 2^n$ bzw. $|U| = 2^{n-1}$. Es gibt also

$$|V \setminus U| = |V| - |U| = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

viele Vektoren $w \in V \setminus U$, also 2^{n-1} Komplemente von U in V. □

6. **(14 Punkte)** (a) **(2 Punkte)** Definieren Sie den Rang einer Matrix.

Lösung:

Der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der Pivots einer Matrix in Zeilenstufenform, die durch Zeilenoperationen auf A entstanden ist.
Alternativ könnte man den Rang z.B. wie folgt definieren:
Der Rang einer Matrix A ist gleich dem Spaltenrang von A, also der Dimension des Spaltenraums

von A; in Formeln $\operatorname{Rang}(A) = \dim \operatorname{Spaltenraum}(A)$. Genauso könnte man den Rang von A als den Zeilenrang von A definieren.

(b) **(6 Punkte)** Sei K ein Körper und seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Seien $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times k}(K)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}(AB) \leq \min(\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\})$ gilt.

Lösung:

Wir zeigen wie auf der Serie, dass für endlich-dimensionale Vektorräume U, V, W über einem Körper K und lineare Abbildungen $S\colon V \to W$, $T\colon W \to U$ die folgende Aussage gilt:

$$\operatorname{Rang}(T \circ S) \leq \min\{\operatorname{Rang}(S), \operatorname{Rang}(T)\}. \tag{1}$$

Da der Rang von $A \in M_{m\times n}(K)$ gleich dem Rang der linearen Abbildung $m_A : K^n \to K^m, x \mapsto Ax$ ist, folgt daraus dann

$$\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(m_{AB}) \leq \min\{\operatorname{Rang}(m_A), \operatorname{Rang}(m_B)\}$$

also die Behauptung. Es gilt nämlich

$$\operatorname{Rang}(m_A) = \dim \operatorname{Im}(m_A) = \dim \operatorname{Spaltenraum}(A) = \operatorname{Rang}(A).$$

Zeigen wir nun also (1):
Wegen $\operatorname{Im}(T \circ S) \subseteq \operatorname{Im}(T)$ gilt $\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) \leq \dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(T)$. Da die Abbildung

$$T|_{\operatorname{Im}(S)} : \operatorname{Im}(S) \to \operatorname{Im}(T \circ S)$$

linear und surjektiv ist, gilt zudem nach dem Rangsatz aus der Vorlesung

$$\operatorname{Rang}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(S) - \dim \operatorname{Ker}(T|_{\operatorname{Im}(S)}) \leq \dim \operatorname{Im}(S) = \operatorname{Rang}(S)$$

und damit auch die Aussage.
Bemerkung: Die Aussage in (1) ist sehr ähnlich zu der Aussage, die man in dieser Aufgabe zeigen soll. Daher sollte man hier auch (1) beweisen. Man könnte aber auch direkt die Aussage für m_A und m_B zeigen anstatt die Aussage für allgemeine lineare Abbildung zu beweisen. Hingegen muss man die Aussage $\operatorname{Im}(m_A) = \operatorname{Spaltenraum}(A)$ nicht beweisen. Wenn Sie sich unsicher sind, könnten Sie diese Aussage zumindest kurz erläutern (zum Beispiel: Nach Vorlesung ist $\operatorname{Im}(m_A)$ durch die Spalten von A erzeugt).

Sei nun $k = m$, also $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$, und es gelte $m > n$.

(c) **(3 Punkte)** Kann AB invertierbar sein? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an, falls nein, beweisen Sie dies.

Lösung:

Für $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$ kann AB nie invertierbar sein.

Beweis: Für $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$ gilt $\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B) \leq n$. Nach Teilaufgabe (b) gilt also $\operatorname{Rang}(AB) \leq \min(\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\}) \leq n < m$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Matrix $C \in M_{m\times m}(K)$ invertierbar ist genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(C) = m$ gilt. Damit kann $AB \in M_{m\times m}(K)$ also nicht invertierbar sein. □

(d) **(3 Punkte)** Kann BA invertierbar sein? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an, falls nein, beweisen Sie dies.

Lösung:

Ja, BA kann invertierbar sein. Zum Beispiel ist für $m = 2 > n = 1$ und $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Matrix $BA = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_n(K)$ invertierbar.

7. **(6 Punkte)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix mit Einträgen 2 auf und unterhalb der Diagonalen und allen anderen Einträgen 6, also

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \dots & 6 \\ 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 6 \\ 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir verwenden Spaltenumformungen und bezeichnen dabei für $j \in \{1, \dots, n\}$ die j-te Spalte von A_n mit S_j. Nach den Spaltenumformungen $S_j - 3S_1 \to S_j$ für $j \in \{2, \dots, n\}$ erhalten wir eine Dreiecksmatrix der Form

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & -4 & 0 & & \vdots \\ 2 & -4 & -4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 2 & -4 & \dots & \dots & -4 \end{pmatrix} = (b_{ij}),$$

wobei $b_{ij} = \begin{cases} 2 & j = 1 \\ -4 & i \geq j, j \neq 1 \\ 0 & i < j, j \neq 1 \end{cases}$.

Da die Determinante einer Dreiecksmatrix laut Vorlesung das Produkt der Diagonaleinträge ist, gilt $\det(B_n) = 2 \cdot (-4)^{n-1}$. Da sich die Determinante laut Vorlesung bei Spaltenumformungen nicht verändert, folgt $\det(A_n) = \det(B_n) = 2 \cdot (-4)^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternative Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wenden den Entwicklungssatz von Laplace an und entwickeln nach der ersten Zeile. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(A_n) =& 2\det(A_{n-1}) - 6\det(A_{n-1}) + 6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & * & \dots & * \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & * & \dots & * \end{vmatrix} \\ & + \dots + (-1)^{n+1} 6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & * & \dots & * \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei spielen die mit $*$ notierten Einträge keine Rolle, da jede Matrix der Form $\begin{vmatrix} 2 & 2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & * & \dots & * \end{vmatrix}$ zwei gleiche Spalten, also Determinante 0 hat. (Wegen (D2) und weil die Determinante der Transponierten gleich der Determninante einer Matrix ist.) Also gilt

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - 6\det(A_{n-1}) = -4\det(A_{n-1}) = \dots = (-4)^{n-1}\det(A_1) = 2 \cdot (-4)^{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bonus-Fragen für die Probeprüfung

Die folgenden Aufgaben haben ein ähnliches Niveau wie Aufgaben, die in der Prüfung gestellt werden könnten, könnten also Teilaufgaben von Prüfungsfragen sein.

1. Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird.

   (a) Geben Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ an, für den das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & -11 \\ 5 & -6 & 2 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

   keine Lösung besitzt.

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Lösung:
   Laut Vorlesung hat $Ax = b$ eine Lösung genau dann, wenn $b \in \text{Spaltenraum}(A)$ ist. Wir bringen A auf Zeilenstufenform und bestimmen daraus $2 = \text{Rang}(A) = \dim \text{Im}(A) = \dim \text{Spaltenraum}(A)$. Das Bild von A wird also aufgespannt von den ersten zwei (linear unabhängigen) Spaltenvektoren von A und jeder Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Spaltenraum}(A)$ ist eine gültige Antwort, z.B. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   über $\mathbb{F}_3$ an.

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Lösung:
   Elementare Zeilenumformungen angewendet auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ ändern

die Lösungsmenge von $Ax = b$ nicht, also formen wir $(A \mid b)$ um:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die eindeutige Lösung von $Ax = b$ ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die folgenden zwei Aufgaben über lineare Abbildungen könnten Teilaufgaben von Aufgabe 5 oder 6 sein, haben also ein ähnliches Niveau wie Beweise, nach denen in der Prüfung gefragt werden könnte.

2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Angenommen, es existiert ein $v \in V$ mit $T(v) \neq 0$ und $T(T(v)) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Im}(T) + \ker(T) \neq V$$

gelten muss.

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass der Vektor $T(v)$ per Definition im Bild $\mathrm{Im}(T)$ enthalten ist, und wegen $T(T(v)) = 0$ auch in $\ker(T)$. Also gilt $0 \neq T(v) \in \mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)$, also $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) \neq \{0\}$ und damit $\dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)) > 0$. Laut der Dimensionformel für Summen aus der Vorlesung gilt damit

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T) + \ker(T)) &= \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \ker(T) - \dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)) \\ &= \dim V - \dim(\mathrm{Im} T \cap \ker T) < \dim V. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus dem Rangsatz aus der Vorlesung, wegen dem

$$\dim \mathrm{Im}(T) + \dim \ker(T) = \dim V$$

für die lineare Abbildung T gilt. Die Ungleichung folgt aus $\dim(\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)) > 0$.
Wir erhalten, dass $\mathrm{Im}(T) + \ker(T)$ ein echter Untervektorraum von V ist, das heißt, dass

$$\mathrm{Im}(T) + \ker(T) \subsetneq V$$

gilt. Denn ansonsten würde $\dim(\mathrm{Im}(T) + \ker(T)) = \dim V$ gelten. (In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für einen Untervektorraum U von einem endlich-dimensionalen Vektorraum V die folgende Äquivalenz gilt: $U = V \iff \dim U = \dim V$.) Es folgt die Behauptung.

3. Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ zwei geordnete Basen von V. Seien weiter $S, T \in \mathrm{End}(V)$ mit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$. Zeigen Sie, dass es $R \in \mathrm{Aut}(V)$ gibt, sodass $T = R^{-1} \circ S \circ R$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Aut}(V)$ die Menge aller Automorphismen von V, also aller Endomorphismen von V, die auch noch bijektiv sind.

Lösung:

Sei $P = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass P invertierbar ist, und dass $P^{-1} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ gilt. Die Transformationformel aus der Vorlesung impliziert

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [S]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id} \circ S \circ \mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} [S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = P^{-1} [S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} P. \tag{2}$$

Sei $n = \dim V$. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die lineare Abbildung

$$\mathrm{End}(V) \to M_{n \times n}(K),\ L \mapsto [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$$

ein Isomorphismus ist, und dass $\mathrm{Aut}(V)$ der Untergruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ entspricht (anders gesagt haben wir gesehen, dass diese Abbildung ein Ring-Isomorphismus ist). Es gibt also ein $R \in \mathrm{Aut}(V)$ mit $[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = P$. Wegen $[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot [R^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [R \circ R^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$ und der Eindeutigkeit der Inversen folgt daraus

$$[R^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = P^{-1}.$$

Aus (2) folgt nun

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = P^{-1} [S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} P = [R^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} [S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} [R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [R^{-1} \circ S \circ R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}},$$

wobei die letzte Gleichheit wiederum aus der Transformationformel folgt. Da die obige Abbildung $\mathrm{End}(V) \to M_{n \times n}(K)$, $L \mapsto [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus ist, folgt jetzt, dass $T = R^{-1} \circ S \circ R$, also die Behauptung.