⑦ (a) <u>Beh:</u> $B := \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}(X)$, $X = \{1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$.

Wir bemerken zunächst, dass für $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ (A, B disjunkt) gilt, dass $A \Delta B = A \cup B$. (*)

Sei nun $A \in \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_m \in X$, $0 \leq m \leq n$ paarweise verschieden

sodass $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. (Falls $A = \emptyset$, so ist $m = 0$.)

Für $m \geq 1$ gilt

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\} \cup \{a_m\} \overset{(*)}{=} \{a_1, \ldots, a_{m-1}\} \Delta \{a_m\}$$

$$= (\{a_1, \ldots, a_{m-2}\} \cup \{a_{m-1}\}) \Delta \{a_m\} \overset{(*)}{=} \{a_1, \ldots, a_{m-2}\} \Delta \{a_{m-1}\} \Delta \{a_m\}$$

$$= \ldots = \{a_1\} \Delta \{a_2\} \Delta \ldots \Delta \{a_m\}.$$

Hier ist keine Klammersetzung nötig wegen der Assoziativität von Δ.

Es gilt ~~Die Mengen~~ $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_m\} \in B$, also haben wir A als Linearkombination von ~~Basis~~ Vektoren aus B geschrieben.

Es bleibt noch zu zeigen, dass B linear unabhängig ist.

Seien dazu $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}_2$ mit

$$(\lambda_1 \{1\}) \Delta (\lambda_2 \{2\}) \Delta ... \Delta (\lambda_n \{n\}) = \emptyset \quad \leftarrow = 0_{\mathcal{P}(X)}$$

Nach Definition der Skalarmultiplikation in $\mathcal{P}(X)$ gilt

$$\lambda_j \{j\} = \begin{cases} \{j\}, \text{ falls } \lambda_j = \bar{1} \in \mathbb{F}_2 \\ \emptyset, \text{ falls } \lambda_j = \bar{0} \in \mathbb{F}_2 \end{cases}$$

Wegen $\emptyset \Delta A = A \Delta \emptyset = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$ und (*) folgt

$$(\lambda_1 \{1\}) \Delta (\lambda_2 \{2\}) \Delta ... \Delta (\lambda_n \{n\}) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \bar{0}}}^{n} \{i\} \overset{!}{=} \emptyset.$$

Dies kann nur gelten, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \bar{0}$ ist, also ist B linear unabhängig.

(b)

Beh. 1: $B_1 := \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ ist keine Basis von $\mathcal{P}(X)$, $X=\{1,2,3\}$.

Beweis: Es gilt $1\cdot\{1,2\} \,\Delta\, 1\cdot\{1,3\} \,\Delta\, 1\cdot\{2,3\}$

$$= (\{1,2\} \,\Delta\, \{1,3\}) \,\Delta\, \{2,3\}$$
$$= ((\{1,2\} \cup \{1,3\}) \setminus (\{1,2\} \cap \{1,3\})) \,\Delta\, \{2,3\}$$
$$= (\{1,2,3\} \setminus \{1\}) \,\Delta\, \{2,3\} = \{2,3\} \,\Delta\, \{2,3\} = \emptyset,$$

also sind die Vektoren aus B_1 linear abhängig und können keine Basis bilden.

Beh. 2: $B_2 := \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}(X)$, $X=\{1,2,3\}$.

Bew.: Es ist $\{2\} = \{1\} \,\Delta\, \{1,2\} \in Sp(B_2)$ und

$\{3\} = \{1,2\} \,\Delta\, \{1,2,3\} \in Sp(B_2)$, also

UVR von $\mathcal{P}(X)$ [Lemma 2.36 (1)]

gilt $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \subseteq Sp(B_2)$ für B aus (a)

und damit $\underset{\text{nach (a)}}{\mathcal{P}(X) =} Sp(B) \subseteq Sp(B_2) \subseteq \mathcal{P}(X)$, also

Lemma 2.36 (2)

$Sp(B_2) = \mathcal{P}(X)$ und B_2 erzeugt $\mathcal{P}(X)$.

Es bleibt zu zeigen, dass B_2 linear unabhängig ist.

Wegen $\{1,2\} \notin Sp(\{1\})$ und $\{1,2,3\} \notin Sp(\{1\}, \{1,2\})$

$= \{\{1\}, \{1,2\}, \{2\}, \emptyset\}$

sind die Voraussetzungen von Lemma 2.79 erfüllt.

Also sind $\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\} \in \mathcal{P}(X)$ linear unabhängig.

⑧ Wir betrachten $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als VR über $\mathbb{F}_2$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{ B \mid B \subseteq \{1, \dots, n\}\}$.

(a) <u>Beh:</u> $A_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein UVR $\forall n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{N}$.

<u>Bew:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig.

Wir überprüfen (UVR1), (UVR2) & (UVR3) um zu zeigen, dass $A_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein UVR ist.

(UVR 1) Es gilt $\emptyset \subseteq \{1, \dots, n\}$, also $\emptyset \in A_n$ und damit $A_n \neq \emptyset$. [Dies überprüft auch (UVR 1').]

(UVR 2) Seien $A, B \in A_n$. Dann gilt

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \cup B \subseteq \{1, \dots, n\}$$

wegen $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$,

also $A \triangle B \in A_n$.

(UVR 3) Sei $a \in \mathbb{F}_2$, $A \in A_n$. Dann ist

$$a \cdot A = \begin{cases} A, & \text{falls } a = \bar{1} \\ \emptyset, & \text{falls } a = \bar{0} \end{cases}$$ und wegen $\emptyset \in A_n$

folgt $a \cdot A \in A_n$.

Also ist A_n ein UVR von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. ∎

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ∎

(b) In (a) haben wir gesehen, dass $A_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ein UVR ist $\forall n \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma 2.34 ist also

$$A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$ ein UVR von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Es ist $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq A_1 = \{ B \mid B \subseteq \{1\}\} = \{\emptyset, \{1\}\}$

und wir behaupten $A = A_1$. Es gilt $\emptyset \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (UVR 1'), also $\emptyset \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Weiter ist $\{1\} \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, da $\{1\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$\{1\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ und damit

$A_1 = \{\emptyset, \{1\}\} \subseteq A$, also $A = A_1$ wie behauptet.

c) <u>Beh:</u> Sei V ein VR über einem Körper K, seien $W_n \subseteq V$ für $n \in \mathbb{N}$ UVR von V mit $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \ldots \subseteq V$. Dann ist $W := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ ein UVR von V.

<u>Bew:</u> Es gilt $0_V \in W_1$, da $W_1 \subseteq V$ ein UVR ist. Also gilt $0_V \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = W$, also (UVR 1').

Seien nun $v, w \in W$. Dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $v \in W_n$, $w \in W_m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) sei $n \leq m$. Dann gilt nach Voraussetzung $W_n \subseteq W_m$, also $v \in W_m$. Weil W_m ein UVR von V ist, gilt also

$\underbrace{v}_{\in W_m} + \underbrace{w}_{\in W_m} \in W_m$, (UVR 2) ist also erfüllt.

Um (UVR3) zu überprüfen, sei $v \in W$, $a \in K$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $v \in W_n$ und weil $W_n \subseteq V$ ein UVR ist, gilt $a \cdot v \in W_n$. Also gilt $a \cdot v \in W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ und W ist ein UVR von V. $\square$

Da nach (a) $A_n \subseteq \mathcal{P}(X)$, $X = \mathbb{N}$, ein UVR ist $\forall n \in \mathbb{N}$, ⊛ folgt aus dieser Behauptung, dass $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ein UVR von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist. ⊛ und da $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ gilt wegen $\{1, \ldots, n\} \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (!)

Sei $A \in \mathcal{P}(X)$. Dann gilt $A \subseteq X = \mathbb{N}$. Falls A endlich ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ (vgl. Aufgabe 8 von Serie 2), also $A \in A_n \subseteq B$. Andererseits ist jedes Element von B eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also ist

$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ (vgl. Aufgabe 8 von Serie 2).

Wegen $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(X)$, aber $\mathbb{N} \notin A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \notin B$, gilt insbesondere $B \neq \mathcal{P}(X)$.

[Alle unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind nicht in B, aber in $\mathcal{P}(X)$ enthalten.]