Dr. Menny Akka Ginosar Winter 2020/21

# Probeprüfung in Lineare Algebra I

D-MATH, D-PHYS, D-CHAB

**ID:** 1
**Nachname, Vorname:** **MU, MA**
**Legi-Nr.:** **-345-678

## Modus

- Bearbeitungszeit: **180 Minuten**
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein Wörterbuch Muttersprache-Deutsch. Es sind keine selbstverfassten Notizen und kein Taschenrechner erlaubt.
- Die Prüfung besteht aus 14 Single Choice Fragen (Aufgabe 1), 4 Box-Fragen (Aufgabe 2) und weiteren fünf Aufgaben zur schriftlichen Beantwortung.
- Beantworten Sie die **Single Choice Fragen** auf dem beigelegten Abgabeblatt. Beachten Sie die Vorgaben zum korrekten Ausfüllen des Abgabeblatts.
- Schreiben Sie Ihre Antworten zu den **Box-Fragen** jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird.
- Beginnen Sie jede der Aufgaben 3 – 7 auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre **Initialen** und die **letzten 6 Stellen** Ihrer Leginummer. Lassen Sie an den Rändern genügend Platz frei.
- Begründen Sie Ihre Lösungen (Ausnahme: Aufgaben 1 und 2). Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen. Wenn Sie ein Resultat aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welches Sie sich beziehen!

## Weitere Hinweise

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- **Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie keinen Tipp-Ex.**

**Nicht ausfüllen**

| Aufgabe | Punkte | Kontrolle |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| Total | | |
| Vollständigkeit | | |
| Bonus | | |
| Endnote | | |

Viel Erfolg!

# Single Choice Antwortblatt

## Bewertungsnummer: 1

**Prüfungsversion:** ☐A ☐B ☐C ☐D **Unbedingt ausfüllen!**

SC-Frage **1 (1)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (2)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (3)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (4)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (5)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (6)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (7)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (8)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (9)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (10)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (11)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (12)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (13)** ☐Wahr ☐Falsch

SC-Frage **1 (14)** ☐Wahr ☐Falsch

# Probeprüfung

**Hinweise zur Notation:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}[x]_n = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$. Für Vektorräume $V, W$ über einem Körper $K$ und eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bezeichnet $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Darstellungsmatrix von $T$ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{C}$ von $W$. $\operatorname{Hom}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von $V$ nach $W$.

1. **(28 Punkte)** Kreuzen Sie **auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen **wahr** oder **falsch** sind. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten **nicht begründen**.

   (1) Sei $K$ ein Körper und seien $f, g \in K[x]$ mit $f \neq g$ und $\deg(f) = \deg(g) = n$. Dann gilt $\deg(f+g) = n$.

   (2) Für $n \geq 2$ gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Äquivalenzrelationen auf $\{1, \ldots, n\}$.

   (3) Eine Abbildung $f\colon M \to M$ auf einer Menge $M$ ist genau dann surjektiv, wenn $f \circ f$ surjektiv ist.

   (4) Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$. Falls $|V| = \infty$ ist, so gilt $\dim V = \infty$.

   (5) Sei $K$ ein Körper und seien $U = \operatorname{Sp}(e_1, e_2), W = \operatorname{Sp}(e_3, e_4) \subseteq K^4$, wobei $e_1, e_2, e_3, e_4$ die Standardbasisvektoren von $K^4$ bezeichnen. Dann existiert ein Untervektorraum $Z \subseteq K^4$, sodass
   $$U \oplus Z = W \oplus Z = K^4.$$

   (6) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

   (7) Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ und sei $A = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$. Gibt es einen Vektor $v \in V$, der sich eindeutig als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ schreiben lässt, so ist $A$ linear unabhängig.

   (8) Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt: Falls $T$ injektiv ist, so ist $T$ auch surjektiv.

   (9) Für alle $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt $\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}\left(B^T A^T\right)$.

   (10) Für jede quadratische Matrix $A$ gilt $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^T$.

   (11) Sei $T\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ die lineare Abbildung definiert durch $T(x, y) = (-y, x)$. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^2$ mit $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (12) Falls $T \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{F}_2^3, \mathbb{F}_2^2\right)$ surjektiv ist, dann hat jeder Vektor in $\mathbb{F}_2^2$ genau zwei Urbilder.

   (13) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $K$ ein Körper. Für Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $AB - A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt
   $$BA - A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

   (14) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für den Endomorphismus $T\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p \mapsto p + p'$ gilt $\det T = 0$.

2. **(16 Punkte)** Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Bestimmen Sie die Determinante von $A^2B^{-1}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 23 & 17 & 0 \\ 34 & 5 & 23 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

   $\det(A^2B^{-1}) =$

   (b) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

   $\operatorname{Rang} A =$

   (c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ für die lineare Abbildung

$$T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A + A^T$$

   und die Basis $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} =$

   (d) Bestimmen Sie die Dimension von $V = \operatorname{Hom}\left(M_{3\times 4}\left(\mathbb{F}_5\right), \mathbb{F}_5\right)$ als Vektorraum über $\mathbb{F}_5$.

   $\dim V =$

3. **(12 Punkte)** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Pro Teilaufgabe sind **4 Punkte** erreichbar.

   (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und $m_A\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, x \mapsto Ax$. Dann gibt es geordnete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}^2$, sodass $[m_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ mit $\dim V = n < \infty$ und sei $T\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $T^2 = 0$. Dann gilt $\dim \operatorname{Ker}(T) \geq \frac{1}{2} \dim V$.

(c) Die Menge $U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. **(12 Punkte)** Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathcal{C} = (2+2x^3, 2x^2, x+x^2, x^3)$ des Vektorraums
$$\mathbb{R}[x]_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \le 3\}\,.$$
   (a) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

   (b) **(6 Punkte)** Sei nun $T\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ die lineare Abbildung gegeben durch
$$p \mapsto (x+2)p + p'' + p(1).$$
   Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$ von $T$ bezüglich der Basen $\mathcal{D} = (1, x, x^2)$ von $\mathbb{R}[x]_2$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}[x]_3$.

   (c) **(2 Punkte)** Finden Sie für $T$ wie in (b) ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_2$ mit $T(p) = 5x^3 + 12x^2 - 3x - 4$.

5. **(14 Punkte)** Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.
   (a) **(2 Punkte)** Definieren Sie, was ein Komplement von $U$ ist.

   (b) **(6 Punkte)** Es gelte nun $\dim V < \infty$. Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ ein Komplement besitzt.

   (c) **(6 Punkte)** Sei nun $K = \mathbb{F}_2$, also $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$, und es gelte $\dim V = n$ und $\dim U = n-1$. Wie viele verschiedene Komplemente hat $U$ in $V$?

6. **(14 Punkte)** (a) **(2 Punkte)** Definieren Sie den Rang einer Matrix.

   (b) **(6 Punkte)** Sei $K$ ein Körper und seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Seien $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times k}(K)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(AB) \le \min(\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\})$ gilt.

   Sei nun $k = m$, also $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$, und es gelte $m > n$.

   (c) **(3 Punkte)** Kann $AB$ invertierbar sein? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an, falls nein, beweisen Sie dies.

   (d) **(3 Punkte)** Kann $BA$ invertierbar sein? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an, falls nein, beweisen Sie dies.

7. **(6 Punkte)** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix mit Einträgen 2 auf und unterhalb der Diagonalen und allen anderen Einträgen 6, also
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \dots & 6 \\ 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 6 \\ 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die Determinante von $A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

## Bonus-Fragen für die Probeprüfung

Die folgenden Aufgaben haben ein ähnliches Niveau wie Aufgaben, die in der Prüfung gestellt werden könnten, könnten also Teilaufgaben von Prüfungsfragen sein.

1. Schreiben Sie Ihre Antworten jeweils in die dazugehörige Box. Sie können diese Fragen gerne zuerst auf einem anderen Blatt lösen und dann Ihr Endresultat übertragen. Beachten Sie aber, dass **nur** Ihr Endresultat in der Box bewertet wird.
   (a) Geben Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ an, für den das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & -11 \\ 5 & -6 & 2 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$
   keine Lösung besitzt.

   $b =$

   (b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   über $\mathbb{F}_3$ an.

   $\text{Lös}(A, b) =$

Die folgenden zwei Aufgaben über lineare Abbildungen könnten Teilaufgaben von Aufgabe 5 oder 6 sein, haben also ein ähnliches Niveau wie Beweise, nach denen in der Prüfung gefragt werden könnte.

2. Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Angenommen, es existiert ein $v \in V$ mit $T(v) \neq 0$ und $T(T(v)) = 0$. Zeigen Sie, dass
   $$\text{Im}(T) + \ker(T) \neq V$$
   gelten muss.

3. Seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K$ und seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ zwei geordnete Basen von $V$. Seien weiter $S, T \in \text{End}(V)$ mit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$. Zeigen Sie, dass es $R \in \text{Aut}(V)$ gibt, sodass $T = R^{-1} \circ S \circ R$. Hierbei bezeichnet $\text{Aut}(V)$ die Menge aller Automorphismen von $V$, also aller Endomorphismen von $V$, die auch noch bijektiv sind.