Serie 10

Rangsatz, Matrixmultiplikation, Darstellungsmatrizen, Transformationsformel

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(a), 5(b) und 7(c) und (d) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in M_{m\times n}(K)$ und $m_A\colon K^n \to K^m, x \mapsto Ax$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(m_A) = \mathrm{Spaltenraum}(A)$ ist.
   Tipp: Benutzen Sie Lemma 3.18 und Lemma 3.26 aus dem Skript.
   (b) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und A eine der beiden folgenden Matrizen:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie jeweils Basen für Kern und Bild von m_A und verifizieren Sie die Dimensionsformel aus dem Rangsatz (Satz 3.27).

2. Gegeben seien die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte, wenn sie definiert sind. Erläutern Sie, warum, wenn ein Produkt nicht definiert ist.
   (a) AD
   (b) $A(2B + 3C)$
   (c) DC
   (d) $(AB)D$
   (e) $A(BD)$
   (f) $D^T D$

   Bemerkung:
   Die Matrixmultiplikation ist ein sehr wichtiges Rechenverfahren der Linearen Algebra. Üben Sie deswegen das Multiplizieren von Matrizen, bis Sie es wirklich gut können. Eine weitere Rechenaufgabe dazu wäre zum Beispiel Aufgabe 1 aus Abschnitt 2.5 im „Übungsbuch zur Linearen Algebra, Aufgaben und Lösungen“ von Hannes Stoppel und Birgit Griese, siehe hier: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-14522-4`. Mithilfe der Website `https://matrixcalc.org/de/` können Sie sich auch selbst noch Matrixprodukte ausdenken und Ihre Rechnungen überprüfen.

3. Seien K ein Körper, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Es gilt $(AB)^T = B^T A^T$. (2)
   Tipp: Benutzen Sie die Definition der Matrixmultiplikation und der Transponierten.

(b) Falls $m = n$ und A invertierbar ist, dann ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $0 \neq p = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ in $K[x]$ gibt, sodass

$$p(A) = \sum_{j=0}^{k} a_j A^j = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k = 0$$

ist. Können Sie eine obere Schranke für $\deg(p)$ angeben, welche nur von n anbhängt?

Tipp: $M_{n\times n}(K)$ ist endlich-dimensional.

5. Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $S\colon V \to W$, $T\colon W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Es gilt $\mathrm{Rang}(T \circ S) \leq \min\{\mathrm{Rang}(S), \mathrm{Rang}(T)\}$.
   (b) Falls T injektiv ist, so gilt $\mathrm{Rang}(T \circ S) = \mathrm{Rang}(S)$. (2)
   (c) Falls S surjektiv ist, so gilt $\mathrm{Rang}(T \circ S) = \mathrm{Rang}(T)$.

   Tipp: Betrachten Sie $T|_{\mathrm{Im}(S)}$.

6. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $K[x]_n$ aller Polynome mit Koeffizienten in K und Grad $\leq n$.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$T\colon K[x]_n \to K[x]_n, \quad p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei $p'' := (p')'$ ist und $p' = \mathrm{D}(p)$ wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Ableitung von p bezeichnet.
   (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$.

7. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei
   $$\mathrm{D}_n\colon K[x]_n \to K[x]_{n-1}, \qquad p \mapsto p',$$
   wobei wiederum $p' = \mathrm{D}(p)$ wie in Beispiel 3.6 aus dem Skript die Ableitung von p bezeichnet.
   (a) Bestimmen Sie zur Wiederholung die Darstellungsmatrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{B}_{n-1}}$ von D_n bezüglich der Basen $\mathcal{B}_n = (1, x, \ldots, x^n)$ von $K[x]_n$ und $\mathcal{B}_{n-1} = (1, x, \ldots, x^{n-1})$ von $K[x]_{n-1}$, vgl. Beispiel 3.44.
   (b) Sei nun $\mathcal{C}_n = (1, 1 + x, 1 + x + x^2, \ldots, 1 + \ldots + x^n)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_n$ eine Basis von $K[x]_n$ ist.
   (c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{C}_n}$ und $[\mathrm{Id}]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{B}_n}$. (2)
   (d) Bestimmen Sie die Matrix $[D_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}}$. (2)

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.