Serie 11

Inverse, Transformationsformel, Ähnlichkeit, Quotientenräume

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3(b)(i), 4(b), 5(b) und 6 bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

Rechnungen wie diese sind etwas, dass Sie am Ende der Vorlesung Lineare Algebra I gut beherrschen sollten. Deswegen geben wir Ihnen hier drei Gelegenheiten, das Finden einer Inversen mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu üben. Es kann gut sein, dass Ihnen zum Beispiel zwei dieser Rechnungen genügen – diese Entscheidung überlassen wir Ihnen.

2. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+4y \\ 3x-6y \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finden Sie Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von T die Form $D_r = (d_{ij})$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leq r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $r = \operatorname{rang}(T)$ annimmt.

3. Seien die linearen Abbildungen $S\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^2$, $T\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ gegeben durch

$$S : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ und sei

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $T \circ S$ und die Matrixdarstellungen von
   (i) S bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. (2)
   (ii) T bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.
   (iii) $T \circ S$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.

4. Wir betrachten den Endomorphismus $F := m_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifizieren Sie, dass $F^2 := F \circ F \neq 0$ und $F^3 := F \circ F \circ F = 0$ gilt.
   (b) Finden Sie eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ mit $F(u) = v$, $F(v) = w$, $F(w) = 0$. (2)
   (c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis (u, v, w).

5. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ *ähnlich* heißen, falls es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $P^{-1}AP = B$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix $I_n \in M_{n\times n}(K)$ nur zu sich selbst ähnlich ist, d.h. falls eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ zu I_n ähnlich ist, dann gilt $A = I_n$. Zeigen Sie außerdem, dass auch die Nullmatrix nur zu sich selbst ähnlich ist.
   (b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich. Zeigen Sie, dass dann auch A^m und B^m ähnlich sind für alle $m \in \mathbb{N}$. (2)
   (c) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und sei $B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich zu A. Zeigen Sie, dass dann auch A^m und B^m ähnlich sind für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
   (d) Zeigen Sie, dass der Rang einer Matrix invariant ist unter Ähnlichkeit, d.h. für ähnliche Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.
   (e) Sei nun $K = \mathbb{Q}$ und $n = 2$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Tipp: Angenommen, Sie wollen die Ähnlichkeit zweier der gegebenen Matrizen A_i, A_j, $i, j \in \{1, \ldots, 8\}$ zeigen. Sie können dann zum Beispiel über die Matrizen A_i, A_j als lineare Abbildungen nachdenken (m_{A_i}, m_{A_j}) und versuchen eine geeignete Basiswechselmatrix P zu finden, welche die eine lineare Abbildung in die andere überführt.
   Um zu zeigen, dass zwei gegebene Matrizen A, B nicht ähnlich sind, kann es hilfreich sein, zunächst einen von Null verschiedenen Vektor v mit $Av = v$ zu finden. Alternativ können Sie auch eine Aussage über die *Spur* verwenden, die Sie wahrscheinlich in der Übungsstunde gesehen haben.

6. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. In der Vorlesung wurde die Skalarmultiplikation auf dem Quotientenraum (2)

$$V/U := V/\sim_U = \{v + U \mid v \in V\}$$

durch

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V/U &\to V/U \\ (\alpha, v + U) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Skalarmultiplikation wohldefiniert ist.

7. Sei $V := \mathbb{R}^5$ mit der Standardbasis $e_1, \ldots, e_5$ und sei $U \subseteq V$ der Untervektorraum aufgespannt durch

$$v_1 = (1,2,0,-1,1)^T, v_2 = (0,1,1,0,1)^T, v_3 = (0,1,1,1,1)^T.$$

   (a) Finden Sie eine Basis w_1, w_2 des Quotientenvektorraums V/U.

   (b) Wir definieren eine Abbildung $f\colon V/U \to \mathbb{R}^2$ durch

   $$f(x_1 w_1 + x_2 w_2) = (x_1, x_2).$$

   Sei $\pi_U\colon V \to V/U$ die kanonische Quotientenabbildung und definiere $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ als Komposition

   $$V \xrightarrow{\pi_U} V/U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2,$$

   also $F := f \circ \pi_U$. Zeigen Sie $F(e_4) = 0$ und $F(e_3) + F(e_5) = -F(e_2)$. Beachten Sie, dass dies unabhängig von Ihrer Wahl einer Basis in (a) gilt.

   (c) Bestimmen Sie nun $F(e_j)$ für $j \in \{1,2,3,5\}$. Beachten Sie, dass diese Bilder nun von Ihrer Wahl in (a) abhängen.

8. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.