D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich
Paula Truöl

Serie 12

Quotientenräume, Determinante, Permutationen

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 3, 4(a), 6(b) und 8 bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Jeder k-dimensionale Untervektorraum U von K^n ist Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems
$$Ax = 0$$
für eine Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$. Was ist der minimale Wert, den m annehmen kann?
Tipp: Verwenden Sie zur Lösung den Quotientenraum K^n/U und die kanonische Quotientenabbildung
$$\pi_U \colon K^n \to K^n/U.$$

2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$:
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Sei K ein Körper. Berechne in Abhängigkeit von $a, b, c, d, e \in K$ die Determinante der Matrix (2)
$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) über dem Körper $\mathbb{R}$. Ist A invertierbar? (2)
   (b) über dem Körper $\mathbb{F}_5$. Ist A invertierbar?

5. Seien K ein Körper, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix und $u, v \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$ Spaltenvektoren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Es gilt
$$\det\left(I_n + uv^T\right) = 1 + v^T u.$$

(b) Es gilt

$$\det\left(S + uv^T\right) = \det(S)\left(1 + v^T S^{-1} u\right).$$

6. (a) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) \in \mathbb{Z}$ ist.

   Bemerkung:

   Allgemeiner könnten wir die Determinante als Abbildung $\det\colon M_{n\times n}(R) \to R$ für einen beliebigen kommutativen Ring R mit Eins (vgl. Definition 1.24) auffassen, siehe Abschnitt 3.2.8 in Fischer. Sie werden dies auch noch in der Vorlesung sehen.

   (b) Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeigen Sie ohne die Determinante auszurechnen, dass auch (2)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

   durch 106 teilbar ist.

7. Stellen Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

   als Produkt von Transpositionen dar und bestimmen Sie das Signum von σ.

Sie können alle Aufgaben dieser Serie lösen, ohne den Entwicklungssatz von Laplace zu benutzen. Für die nächste Aufgabe könnte es Ihnen allerdings helfen, diesen Satz zu verwenden.

8. Seien a und b Elemente eines Körpers K und für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die $(n \times n)$-Matrix (2)

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie

$$\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big).$$

9. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.