D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2020
Dr. Menny Akka Ginosar | | ETH Zürich
Paula Truöl

Serie 13

Teil II zur Determinante: Leibniz-Definition, Laplace-Entwicklung, Cramersche Regel, Adjungierte, Vandermonde-Matrix

Hinweis: Auf dieser Serie können Sie keine Punkte bekommen. Die Serie ist inhaltlich aber genauso relevant für die Prüfung wie die Serien 1-12.

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 4x + 5y + 6z &= 15 \\ 7x + 8y + 10z &= 25. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ hat und bestimmen Sie diese mit Hilfe der Cramerschen Regel.

2. Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix A über die Formel $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A)$, wobei $\operatorname{adj}(A)$ die Adjunkte von A bezeichnet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$.
   (a) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie: Falls n ungerade und $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist, so gilt $\det(A) = 0$.
   (b) Finden Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ eine schiefsymmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, so dass $\det(A) \neq 0$.

4. (Teil einer Prüfungsaufgabe im Sommer 2020)
   Sei für $b, c \in \mathbb{C}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\det(B)$. Zeigen Sie auch, dass $\det(B) = 0$ gilt, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $z^3 + bz^2 = 0$ und $z^2 + cz + 1 = 0$.

   Bemerkung:

   In der letzteren Aussage kann "falls" durch "genau dann wenn" ersetzt werden, dies ist aber nicht zu zeigen.

5. Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung mit der Leibniz-Definition der Determinante, also ohne die axiomatische Definition der Determinante zu benutzen. Für jede Blockdreiecksmatrix der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline B' & A'' \end{array}\right)$$

mit quadratischen Matrizen A' und A'' und der jeweiligen Nullmatrix 0 gilt

$$\det(A) = \det(A') \cdot \det(A'').$$

Tipp: Sie dürfen benutzen, dass $\det\left(A^T\right) = \det(A)$ gilt, um nur eine der beiden Blockdreiecksmatrizen betrachten zu müssen.

6. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Summe
$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, 2^{a(\sigma)}\,,$$
wobei $a(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ bezeichnet, also
$$a(\sigma) = \left|\left\{k \in \{1, \ldots, n\} \;\middle|\; \sigma(k) = k\right\}\right|.$$
Tipp: Die Summe ist die Determinante einer gewissen $n \times n$-Matrix. Sie können außerdem Aufgabe 8 von Serie 12 verwenden.

7. (Prüfungsaufgabe im Winter 2018)
   (a) Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $x, b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung hat.
   (b) Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$
   Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A nicht invertierbar?
   (c) Bestimmen Sie für λ wie in Teilaufgabe (b):
      (i) die Zeilenstufenform von A.
      (ii) den Kern und das Bild von m_A.

   Bemerkung:
   Sollten Sie λ in Teilaufgabe (b) nicht bestimmt haben, lösen Sie die Teilaufgabe (c) für die folgende Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$. Wir betrachten die *Vandermonde-Matrix* $V(x_1, \ldots, x_n)$, die definiert ist als
$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie
$$\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,.$$

(b) Sei nun $K[x]_n$ der Vektorraum der Polynome über K vom Grad $\leq n$ und seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon K[x]_n \to K^{n+1},\ p \to \big(p(x_1), \ldots, p(x_{n+1})\big)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Tipp: Sie können Teilaufgabe (a) und die Standardbasen der beiden Vektorräume benutzen oder sich an eine alte Übungsaufgabe erinnern.

(c) Um Aufgaben wie die folgende zu lösen, könnten wir eine konkrete Inverse für die Abbildung Φ aus (b) bestimmen. Sie können dies zum Beispiel für $n = 2$ versuchen. Hier ist eine Aufgabe, die Sie auch lösen können ohne die Inverse von Φ zu finden:

Finden Sie ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad 3, sodass

$$p(0) = -5, \quad p(1) = -3, \quad p(-1) = -15 \quad \text{und} \quad p(2) = 39$$

gilt.

9. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.