2a) Es gilt

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \Delta A$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$, da die Mengen-Operationen Schnitt ($\cap$) und Vereinigung ($\cup$) kommutativ sind.

Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Wir behaupten, dass $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ gilt.

Wir bemerken zuerst, dass

$$B \Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \cup C) \cap (B \cap C)^c$$
$$= (B \cup C) \cap (B^c \cup C^c) = (B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)$$

gilt.

Daraus folgt

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \cap (B \Delta C)^c) \cup ((B \Delta C) \cap A^c)$$

mit $(B \Delta C)^c = ((B \cup C) \cap (B^c \cup C^c))^c = (B \cup C)^c \cup (B^c \cup C^c)^c$
$$= (B^c \cap C^c) \cup (B \cap C),$$

also $A \Delta (B \Delta C) = (A \cap ((B^c \cap C^c) \cup (B \cap C))) \cup ((B \Delta C) \cap A^c)$
$$= (A \cap ((B^c \cap C^c) \cup (B \cap C))) \cup (((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c)$$
$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$$
$$\cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c).$$

Weiter gilt $C \cap (A \Delta B)^c = C \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c$
$$= C \cap ((A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c)$$
$$= C \cap ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)) = C \cap ((A^c \cap B^c) \cup (B \cap A))$$
$$= (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap B \cap A), \text{ also}$$

$$(A \Delta B) \Delta C = (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c) \cup (C \cap (A \Delta B)^c)$$
$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap B \cap A)$$
$$= A \Delta (B \Delta C),$$ also die Beh.

7b) Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von $f_1 \in V_1$, $f_2 \in V_2$ mit $f = f_1 + f_2$ für ein gegebenes $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sei also $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und seien $f_1, g_1 \in V_1$, $f_2, g_2 \in V_2$ mit $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$.

Dann gilt $h := \overbrace{f_1 - g_1}^{\in V_1} = \overbrace{g_2 - f_2}^{\in V_2} \in V_1 \cap V_2$, da $V_1, V_2 \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Untervektorräume sind.

Also gilt $-h(x) \underset{h \in V_2}{=} h(-x) \underset{h \in V_1}{=} h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, also $h \equiv 0$ und damit $f_1 - g_1 = 0 = g_2 - f_2$

$\Leftrightarrow f_1 = g_1 \;\&\; g_2 = f_2$.

Dies zeigt die Eindeutigkeit.

c) Sei K nun ein Körper mit $\text{char}(K) = 2$.

<u>Beh:</u> $V = V_1 = V_2$, wobei $V = \text{Abb}(K, K)$ wie in (a).

<u>Bew:</u> Für $x \in K$ gilt

$$2 \cdot x = x + x$$
$$\| $$
$$\underbrace{(1+1)}_{=0 \text{ wegen } \text{char}(K)=2} \cdot x = 0$$

besser: $x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = \underbrace{(1+1)}_{=0 \text{ wegen } \text{char}(K)=2} \cdot x = 0$

Also gilt $x = -x \quad \forall x \in K$.

Damit folgt

$$V_1 = \{ f \in \text{Abb}(K, K) \mid \forall x \in K: f(\underbrace{-x}_{=x}) = f(x) \}$$
$$= \{ f \in \text{Abb}(K, K) \mid \forall x \in K: f(x) = f(x) \}$$
$$= \text{Abb}(K, K) = V$$

und

$$V_2 = \{ f \in \text{Abb}(K, K) \mid \forall x \in K: f(-x) = \underbrace{-\overbrace{f(x)}^{\in K}}_{= f(x)} \}$$
$$= \{ f \in \text{Abb}(K, K) \mid \forall x \in K: f(x) = f(x) \}$$
$$= \text{Abb}(K, K) = V. \qquad \square$$

9a) Wir möchten das Gleichungssystem

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =: v \text{ lösen}$$

für $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

Erweiterte Koeffizientenmatrix, die wir mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \Leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 - L_1 \to L_1]{L_3 - 2L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \Leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\to L_4]{L_4 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 + \frac{3}{2}L_3 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow a_4 = -\frac{7}{2} \cdot 2 = -7, \quad -2a_3 - a_4 = -1 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1-a_4}{2} =: 4$

$a_2 = -1, \quad a_1 = 3$

Also gilt $\cancel{3v_1 + 2v_2 - v_3 - 3v_4}$

$$3v_1 - v_2 + 4v_3 - 7v_4 = v$$

b) Wir bemerken, dass
$$p_1(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0,$$
$$p_2(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 4 \cdot x^0,$$
$$p_3(x) = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 \cdot x^0$$
$$p_4(x) = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^0$$

gilt und somit $2x^3 + 3x^2 - 1 = 3p_1 - p_2 + 4p_3 - 7p_4$.

c)

Es gilt

$$3A_1 - A_2 + 4A_3 - 7A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bem.: Beachten Sie, dass in (b) keine erneute Anwendung des Gauss-Verfahrens nötig war. Dies liegt daran, dass die Koeffizientenvektoren von $p_1(x), \dots, p_4(x)$ bezüglich der Basis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathbb{R}_3[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ gerade die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind.
Analog in c) für $A_1, \dots, A_4$ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.